Algebra

Blatt 6 — 25.11.2014

Aufgabe 21.

(1) Sei K ein perfekter Körper.

Zeigen Sie, daß jede endliche Körpererweiterung von K zu einem Faktorring von $K[T]$ isomorph ist.

(2) Sei L/K eine endliche Erweiterung.

Zeigen Sie, daß K genau dann perfekt ist, wenn L perfekt ist.

Aufgabe 22.

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.

(a) L/K ist nicht separabel.

(b) Es gibt eine Derivation $\partial : L \to L$ mit $\partial(a) = 0$ für alle $a \in K$ und $\partial \neq 0$.

Aufgabe 23.

Sei F ein unendlicher Körper der Charakteristik $p > 0$. Sei $F(X, Y)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $F[X, Y]$ in zwei Variablen X und Y.

(1) Zeigen Sie, daß $L = F(X, Y)$ eine rein inseparable Erweiterung des Unterkörpers $K = F(X^p, Y^p)$ ist.

(2) Bestimmen Sie $[L : K]$ und zeigen Sie, daß es unendlich viele Zwischenkörper gibt.

Aufgabe 24.

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind:

(1) $3X^5 + 14X^3 - 21X^2 + 49X - 7$,

(2) $X^{12} + 27X + 1002$,

(3) $X^4 + 1$.

(b) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl $f = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad $2n + 1$. Angenommen p teilt nicht a_{2n+1} aber $p|a_i$ für alle $i \leq 2n$ und sogar $p^2|a_i$ für alle $i \leq n$ wobei p^3 wiederum nicht a_0 teilt. Man zeige, daß ein solches f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 2.12.2014, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`

---

25. November 2014