Dualitätsrelation zwischen Moran-Modell und Kingman-Koaleszent

26.04.2013

Wir betrachten die Genealogien einer Stichprobe von n zufällig aus der Population herausgegriffenen Individuen im Moran-Modell und im Kingman-Modell. Die Individuen haben verschiedene Typen (A,B,...), die vererbt werden.

Es sei $X_t^{(N)}$ der Anteil an Typ A Individuen im Moran Modell zur Vorwärtszeit t und D_r die Anzahl der Linien des Typs A im Kingmanschen Anzahlprozess zur Rückwärtszeit r. Wir betrachten den Fall $N \to \infty$.

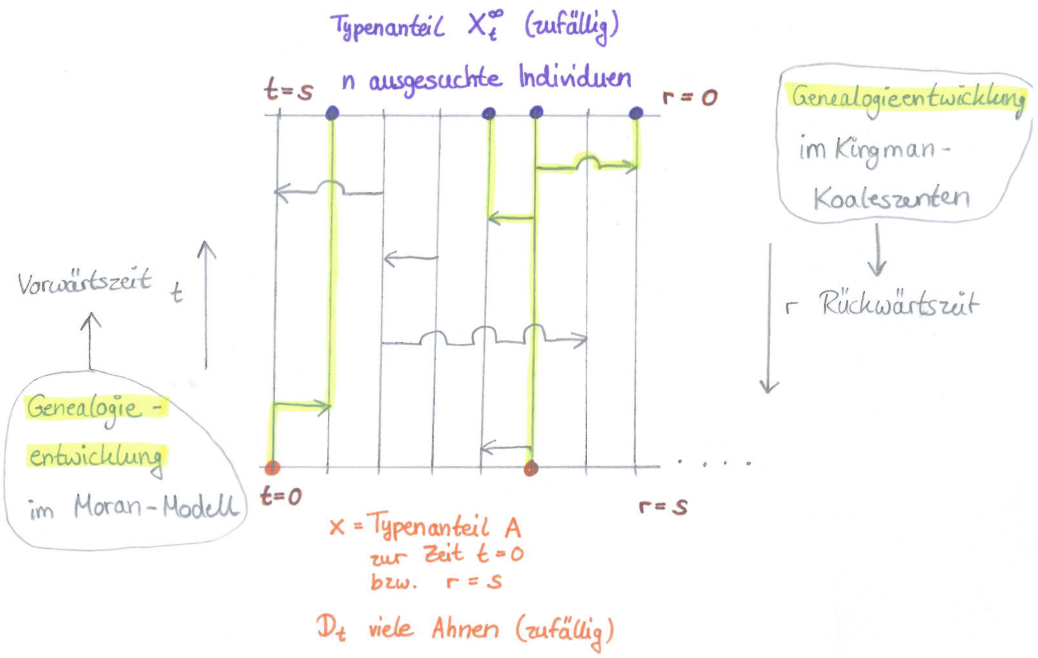

Abbildung 1: Dualität zwischen Moran-Modell und Kingman-Koaleszent: Die n zur Zeit $t = s$ bzw. $r = 0$ ausgesuchten Individuen sind genau dann alle vom Typ A, wenn alle ihre Ahnen zur Zeit $t = 0$ bzw. $r = s$ vom Typ A sind. Vorwärts in der Zeit entwickeln sich die Genealogien im Moran-Modell und rückwärts in der Zeit beschrieben sie einen Kingman-Koaleszenten.

Satz: $\boxed{\mathbb{E}_x\left[\left(X_s^{(\infty)}\right)^n\right] = \mathbb{E}_n\left[x^{D_s}\right]}$

Beweisidee:

Sei $x := X_0^{(\infty)}$ der Anteil der Individuen vom Typ A in der Population zur Zeit 0. Dieser entwickelt sich gemäß des Moran-Modells vorwärts in der Zeit weiter. Ziehe zur Zeit $t = s$ eine zufällgige Stichprobe der festen Größe n mit Zurücklegen und betrachte deren Typenverteilung *(die Aussage des Satzes ist nur für $X_s^{(\infty)}$ richtig, da für unendlich viele Individuen in Verteilung gilt „Ziehen mit Zurücklegen"="Ziehen ohne Zurücklegen")*. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_x\left(\text{n zufällig gezogene Individuen zur Zeit } t = s \text{ haben alle Typ A}\right)\\ &\quad= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}\left(\text{ziehe } n\text{-Mal Typ A zur Zeit } t = s | X_s^{(\infty)}\right)\right]\\ &\quad= \mathbb{E}_x\left[\left(X_s^{(\infty)}\right)^n\right]\end{aligned}$$

Andererseits entwickeln sich die Genealogien der n gezogenen Individuen rückwärts in der Zeit gemäß eines Kingman-Koaleszenten. Da der Typ vererbt wird, sind die n Individuen genau dann alle vom Typ A, wenn ihre Ahnen alle vom Typ A sind. Es gibt nach der Rückwärtszeit $r = s$ noch zufällig viele Ahnen (nämlich D_s viele). Jeder Ahne ist mit Wahrscheinlichkeit x vom Typ A (da ja die Frequenz zur Zeit $t = 0$, bzw. $r = s$ gerade x ist). Somit gilt:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_x\left(\text{n zufällig gezogene Individuen zur Zeit } t = s \text{ haben alle Typ A}\right)\\ &\quad= \mathbb{P}(\text{alle Ahnen zur Zeit } r = s \text{ der zur Zeit } r = 0 \text{ gezogenen } n \text{ Individuen haben Typ } A |\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Typanteil zur Zeit } r = s \text{ ist } x)\\ &\quad= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(\text{alle aus den } D_s \text{ Ahnen der zur Zeit } r = 0 \text{ gezogenen } n \text{ Individuen haben Typ } A \,|\right.\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. D_s, \text{Typanteil zur Zeit } r = s \text{ ist } x)\right]\\ &\quad= \mathbb{E}_n[x^{D_s}].\end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt sich die Behauptung des Satzes.