# Algebra
## Blatt 7 — 02.12.2014

**Aufgabe 25.**

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $v : K(X)^\times \to \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$v(\frac{f}{g}) = \deg(g) - \deg(f)$$

wohldefiniert ist und eine diskrete Bewertung auf $K(X)$ definiert: die Gradbewertung.

(b) Sei $\iota : K(X) \to K(X)$ der $K$-Automorphismus von $K(X)$, der durch $X \mapsto X^{-1}$ festgelegt wird. Beschreiben Sie die Bewertung, welche aus der Gradbewertung durch Vorschalten von $\iota$ entsteht.

(c) Finden Sie einen Hauptidealring in $K(X)$, so daß die Gradbewertung eine zu einem Primelement gehörige diskrete Bewertung ist.

**Aufgabe 26.**

Beweise Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[T]$:

(a) $T^3 - 5T^2 + 1$,

(b) $T^4 + 2T^2 + T + 3$,

(c) $T^5 + T^2 + 1$.

*Tipp: Reduzieren Sie modulo* 2.

**Aufgabe 27.**

Sei $K$ ein Körper der Charakteristik 2. Sei $L/K$ eine Körpererweiterung mit $[L : K] = 2$.

(a) Zeigen Sie, daß $L/K$ von einem Element $\alpha \in L$ erzeugt werden kann, welches über $K$ entweder (i) das Minimalpolynom $T^2 - a$ mit einem $a \in K$ oder (s) das Minimalpolynom $T^2 + T + b$ mit einem $b \in K$ hat.

(b) Finden Sie jeweils ein Beispiel für die Fälle (i) und (s) aus Teil (a).

(c) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_K(L)$.

*Tipp: betrachten Sie $\alpha \mapsto \alpha + 1$ in einem der beiden Fälle.*

(d) Schließen Sie aus (c), daß in $L/K$ nicht sowohl Elemente mit Minimalpolynom vom Typ (i) als auch vom Typ (s) vorkommen.

(e) In welchem Fall ist $L/K$ galoissch?

**Aufgabe 28.**

Es sei $K$ ein Körper und $G \subset \mathrm{Aut}_K\big(K(X)\big)$ die Gruppe von $K$-Automorphismen des rationalen Funktionenkörpers $K(X)$, welche von den $K$-Automorphismen $X \mapsto \frac{1}{X}$ und $X \mapsto 1 - X$ erzeugt wird. Zeige:

(a) $Y = \frac{(X^2-X+1)^3}{X^2(1-X)^2} \in K(X)$ ist invariant unter $G$.

(b) Der Körper $K(X)^G$ der $G$-invarianten Elemente ist der von $Y$ erzeugte Körper $K(Y) \subseteq K(X)$.

(c) Die Körpererweiterung $K(X)/K(Y)$ ist endlich galoissch mit Galoisgruppe $G$, welche isomorph zur symmetrischen Gruppe $S_3$ ist.

*Tip:* Finde 3 Werte, welche von $G$ permutiert werden. Betrachte dazu jedes $\sigma \in G$ in geeigneter Weise als Abbildung $K \cup \{\infty\} \to K \cup \{\infty\}$.

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den 09.12.2014, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`

---

2. Dezember 2014