Algebra

Blatt 8 — 09.12.2014

Aufgabe 29.

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}$ der algebraische Abschluß von $\mathbb{F}_p$. Wir betrachten die Untergruppe $\Gamma = \langle \mathrm{Frob}_p \rangle$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$.

(1) Zeigen Sie, daß $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$.

(2) Bestimmen Sie $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}^\Gamma$. Ist $\mathbb{F}/\mathbb{F}_0$ galoissch?

(3) Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$.

Aufgabe 30.

Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und bestimmen Sie eine Normalbasis.
Erzeugt $\zeta_3 + \sqrt[3]{5}$ eine Normalbasis?

Aufgabe 31.

Sei Ω/K eine Körpererweiterung, L/K ein endlicher galoisscher Zwischenkörper und E ein weiterer beliebiger Zwischenkörper. Wir setzen $F = EL$ in Ω für das Kompositum von E und L. Zeigen Sie

(1) F/E ist endlich galoissch und die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma|_L$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus
$$\mathrm{res}_L^F : \mathrm{Gal}(F/E) \to \mathrm{Gal}(L/K).$$

(2) Bestimmen Sie das Bild von res_L^F und beschreiben Sie den zugehörigen Fixkörper.

(3) Zeigen Sie, daß $[F : E]$ ein Teiler von $[L : K]$ ist.

(4) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu (3), wenn L/K nicht galoissch ist.

Aufgabe 32.

Bestimmen Sie die Galoisgruppe der galoisschen Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})/\mathbb{Q}$.

(1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $P_{\alpha/\mathbb{Q}}$ von $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{3}}$.

(2) Bestimmen Sie die Nullstellen von $P_{\alpha/\mathbb{Q}}$ in $\mathbb{C}$.

(3) Zeigen Sie, daß die galoisschen Hülle L von $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})/\mathbb{Q})$ von Grad $[L:\mathbb{Q}] = 8$ ist.

(4) Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ als Permutationsgruppe auf den Nullstellen von $P_{\alpha/\mathbb{Q}}$.

Tipp: Es gibt genau zwei nichtabelsche Gruppen der Ordnung 8. Eine davon, die Quaternionengruppe Q_8 hat keine treue Operation auf weniger als 8 Elementen.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 16.12.2014, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`

---

9. Dezember 2014