Algebra

Blatt 9 — 16.12.2014

Aufgabe 33. (Explizite Kummertheorie für quadratische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$)

Seien $a_i \in \mathbb{Q}^\times$ für $i = 1, \ldots, r$ gegeben. Wir betrachten den Körper

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{a_i}\ ;\ i = 1, \ldots, r)$$

der von den Quadratwurzeln der a_i erzeugt wird.

(a) Zeigen Sie, daß $K/\mathbb{Q}$ galoissch mit $[K : \mathbb{Q}]$ eine 2er-Potenz ist.

(b) Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Wir definieren auf der Untergruppe $\Delta := \langle a_1, \ldots, a_r \rangle \subseteq \mathbb{Q}^\times$ eine Abbildung $\chi_\sigma : \Delta \to \{\pm 1\}$ durch

$$\chi_\sigma(d) = \frac{\sigma(\delta)}{\delta},$$

wobei $\delta \in K^\times$ beliebig mit $\delta^2 = d$ ist. Zeigen Sie, daß χ_σ wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, daß χ_σ einen Gruppenhomomorphismus

$$\Delta \cdot (\mathbb{Q}^\times)^2/(\mathbb{Q}^\times)^2 \simeq \Delta/(\Delta \cap (\mathbb{Q}^\times)^2) \to \{\pm 1\}$$

induziert. Dieser sei auch mit χ_σ bezeichnet.

(d) Zeigen Sie, daß $\sigma \mapsto \chi_\sigma$ ein Gruppenisomorphismus ist:

$$\chi : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}\big(\Delta \cdot (\mathbb{Q}^\times)^2/(\mathbb{Q}^\times)^2, \{\pm 1\}\big).$$

Tipp: Sowohl $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ als auch $\Delta \cdot (\mathbb{Q}^\times)^2/(\mathbb{Q}^\times)^2$ sind als endlich dimensionale Vektorräume über $\mathbb{F}_2$ aufzufassen. Dann ist χ die adjungierte Abbildung zur Paarung

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \times \Delta \cdot (\mathbb{Q}^\times)^2/(\mathbb{Q}^\times)^2 &\to \{\pm 1\} \\ (\sigma, d) &\mapsto \chi_\sigma(d). \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, daß diese Paarung nicht ausgeartet ist.

(e) Formulieren Sie eine Aussage darüber, wann die Menge der Quadratwurzeln

$$\left\{\alpha_\varepsilon = \sqrt{a_1^{\varepsilon(1)} \cdot \ldots \cdot a_r^{\varepsilon(r)}}\ ;\ \varepsilon : \{1, \ldots, r\} \to \{0, 1\}\right\}$$

über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind als Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{C}$.

Aufgabe 34.
Sei L/K eine Erweiterung endlicher Körper. Zeigen Sie, daß die Norm $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$ surjektiv ist.

Tipp: Sie kennen die Struktur von $L^\times$ von $K^\times$ und auch die Elemente von $\mathrm{Gal}(L/K)$ explizit. Bestimmen Sie ein $N \in \mathbb{Z}$, so daß $N_{L/K}(a) = a^N$ für alle $a \in L^\times$.

Aufgabe 35. (Duale Basis bzgl. der Spurform)
Sei $L = K(\alpha)$ von einem Element α mit separablem Minimalpolynom $f \in K[X]$ erzeugt.

(1) Bestimmen Sie $\mathrm{tr}_{L/K}\big(\alpha^i/f'(\alpha)\big)$ für $0 \le i < \deg(f)$.

Tipp: Partialbruchzerlegung von $1/f(X)$, Substitution $Y = 1/X$ und Potenzreihenentwicklung in $Y = 0$.

(2) Sei $\sum_{i=0}^{\deg(f)-1} \beta_i X^i$ das Polynom $\frac{f(X)}{X-\alpha} \in L[X]$. Zeigen Sie, daß $\beta_i/f'(\alpha)$ mit $0 \le i < \deg(f)$ die Dualbasis von $1, \alpha, \ldots, \alpha^{\deg(f)-1}$ bezüglich der Spurform ist.

Tipp: Definieren Sie die L/K-Spur eines Polynoms aus $L[X]$ als koeffizientenweise Spur und berechnen Sie

$$\mathrm{tr}_{L/K}\big(\alpha^i/f'(\alpha) \cdot \sum_j \beta_j X^j\big).$$

Aufgabe 36.
Es sei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel.

(1) Bestimmen sie für eine Primzahl p und für $m \in \mathbb{N}$ das Kreisteilungspolynom $\Phi_{p^m}(T)$.

(2) Berechnen Sie $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}}(\zeta_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(3) Zeigen Sie

$$N_{\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}}(1 - \zeta_n) = \begin{cases} p & \text{falls } n = p^m \text{ eine Primpotenz,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abgabe: Am Dienstag, den 13.01.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`
