Algebra

Blatt 10 — 13.01.2015

Aufgabe 37.
Aus der Vorlesung ist die Galoisgruppe des Polynoms $T^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$ bekannt. Bestimmen Sie die Galoisgruppe von $T^4 - 2$ als Polynom über $\mathbb{Q}(i)$ und über $\mathbb{Q}(\zeta_8)$, wobei ζ_8 eine 8-te primitive Einheitswurzel ist.

Aufgabe 38.
Sein $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Bestimmen Sie jeweils eine p-Sylowgruppe von

(a) der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

(b) der Diedergruppe D_n der Ordnung $2n$,

(c) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Aufgabe 39.
Sei $a_p(G)$ die Anzahl der p-Sylowgruppen einer Gruppe G.

(a) Sei N ein Normalteiler der endlichen Gruppe G. Zeigen Sie $a_p(N) = a_p(G)$ für alle Primzahlen p mit $p \nmid (G : N)$.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 60. Welche $a_p(G)$ erlauben die Sylowsätze?

(c) Bestimmen Sie $a_p(A_5)$ für $p = 2, 3$ und 5. Beschreiben Sie jeweils eine p-Sylowuntergruppe von A_5. Wieviele Elemente von A_5 liegen in 5-Sylowgruppen, wieviele in 3-Sylowgruppen?

(d) Zeigen Sie, daß A_5 keine Normalteiler N verschieden von 1 und A_5 hat.
Tipp: Nutzen Sie (a) und (c).

Aufgabe 40.
Seien p und q Primzahlen. Zeigen Sie, daß eine Gruppe der Ordnung p^2q einen nichttrivialen Normalteiler hat.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 20.01.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`