

## Programmierpraktikum Computational Finance

### Blatt 5



## 1 Einführung

Auf diesem Blatt wollen wir nun Amerikanische Optionen über den PDE Ansatz berechnen. Der Wert von Amerikanischen Optionen ist jedoch nicht, wie bei Europäischen Optionen als Lösung einer Differentialgleichung gegeben, sondern wegen der Möglichkeit der vorzeitigen Ausübung der Option als Lösung einer Differential-Ungleichung, nämlich eines freien Randwertproblems.

Für eine numerische Lösung wird das freie Randwertproblem als linear komplementäres Problem geschrieben und es werden nach Diskretisierung projektive iterative Verfahren, wie das projektive SOR oder das projektive CG Verfahren angewandt. Neben der Diskretisierung mit Finiten Differenzen, die wir auf Blatt 4 kennengelernt haben, werden wir auf diesem Blatt auch Finite Elemente einsetzen. Mit Hilfe von hierarchischen Finiten Elementen ist es möglich das Diskretisierungsgitter adaptiv an lokale Unglattheiten der Lösung verfeinern, was die Konvergenzrate verbessert. Im Falle von Optionen ist die Lösung aufgrund des Knicks in der Auszahlungsfunktion in der Nähe des Ausübungszeitpunktes weniger glatt, als weiter entfernt.

## 2 Herleitung des linear komplementären Problems

Auf Blatt 4 haben wir die Black-Scholes Gleichung hergeleitet. Diese Herleitung gilt auch für Amerikanische Optionen, wobei hier jedoch an Stelle der Gleichung eine Ungleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \quad (1)$$

entsteht. Weiterhin muß bei Amerikanische Optionen im Gegensatz zu Europäischen Optionen der Optionspreis aus Arbitragegründen immer über der Auszahlungsfunktion liegen, d.h. für Call Optionen

$$V(S, t) \geq (S - K)^+ \quad (2)$$

und für Put Optionen

$$V(S, t) \geq (K - S)^+. \quad (3)$$

Diese beiden komplementären Bedingungen gelten für alle  $(S, t)$ . Für den Fall, daß die strikte Ungleichung in (2),(3) gilt, muß in (1) Gleichheit gelten und damit ein Punkt  $S_f(t)$  mit  $0 < S_f(t) < K$  existieren, für den

$$\begin{aligned} V(S, t) &= (K - S) && \text{für } S \leq S_f(t) \\ V(S, t) &\text{ löst die BS-Gleichung} && \text{für } S > S_f(t) \end{aligned} \quad (4)$$

gilt. Sobald  $S \leq S_f$  wird, sollte der Halter der Amerikanischen Option diese sofort ausüben. Dieser optimale Ausübungspunkt  $S_f(t)$  ist jedoch a priori unbekannt und daher wird das Problem, den Optionspreis für  $S > S_f(t)$  zu berechnen, auch freies Randwertproblem genannt (siehe Abb. 1). An dem optimalen Ausübungspunkt selbst müssen zwei Bedingungen gelten. Zum einen gilt, wie eben gesehen,

$$V(S_f(t), t) = S_f(t) - K \quad (5)$$

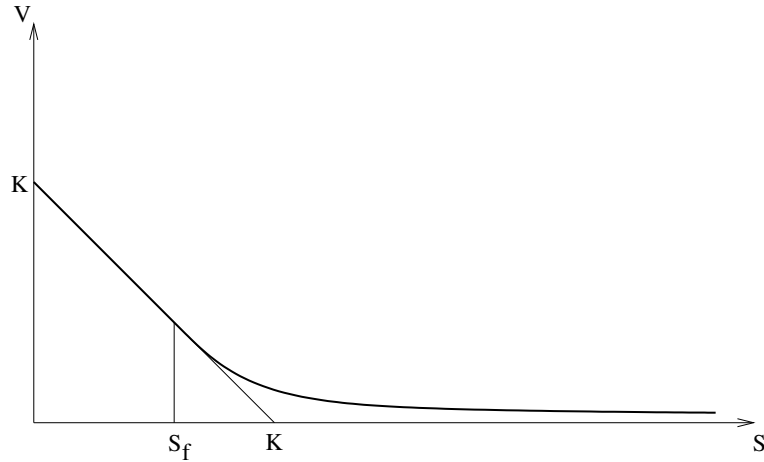


Abbildung 1: Der Optionspreis einer Amerikanischen Put Option mit freiem Rand.

und aus Arbitragegründen muß der Optionspreis  $V$  glatt in die Auszahlungsfunktion übergehen, d.h.

$$\frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial S} = -1. \quad (6)$$

Im Prinzip muß also für Amerikanische Optionen auch nur die Black-Scholes Gleichung gelöst werden, allerdings zusammen mit dem freien Rand  $S_f(t)$ . Nachdem der freie Rand  $S_f(t)$  unbekannt ist, wird daher das Problem so umformuliert, daß die freien Randbedingungen nicht explizit auftreten. Dies geschieht Schreibweise des Ungleichungssystems als linear komplementäres Problem

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) (V - (K - S)^+) &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV &\leq 0 \\ (V - (K - S)^+) &\geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

mit den bereits bekannten Anfangsbedingungen und obigen Randbedingungen. Nach Transformation (3.1) vom letzten Blatt entsteht so das linear komplementäre Problem

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (y - g) &= 0 \\ \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) &\geq 0 \\ y - g &\geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(x, 0) = g(x, 0) \quad (9)$$

und den Randbedingungen

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x, \tau) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x, \tau) \quad (10)$$

wobei nach Diskretisierung hier wieder  $x_{min}$  und  $x_{max}$  verwendet werden. Die Funktion  $g(x, \tau)$  ist die Auszahlungsfunktion nach Transformation, also

$$g(x, \tau) = e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \max\{e^{\frac{1}{2}(q-1)x} - e^{\frac{1}{2}(q+1)x}, 0\} \quad (11)$$

mit  $q = 2r/\sigma^2$ , wie auf dem letzten Blatt.

### 3 Lösung des linear komplementären Problems

Zur Lösung des linear komplementären Problems kann jetzt nicht mehr die LR-Zerlegung, wie auf Blatt 4 beschrieben, verwendet werden. Daher wird hier auf iterative Verfahren, die vor allem bei mehrdimensionalen partiellen Differentialgleichungen eingesetzt werden, zurückgegriffen. Wir wollen hier zwei dieser Verfahren betrachten, das projektive SOR und das projektive CG Verfahren.

#### 3.1 Projektives SOR

Wir wollen nun das gleiche Diskretisierungsgitter  $(\Delta\tau, \Delta x)$  wie in 3.2 auf dem letzten Blatt beschrieben betrachten. Sei  $A$  die Iterationsmatrix des Zeitschrittverfahrens (also die Einheitsmatrix für das explizite Verfahren, die Matrix  $C$  für das implizite Verfahren, bzw. die Matrix  $A$  des Crank–Nicolson Verfahrens),  $b$  die rechte Seite (also  $y^{(j)}$  für das explizite,  $y = y^{(j)} + e^{(j)}$  für das implizite und  $By^{(j)} + d^{(j)}$  für das Crank–Nicolson Verfahren),  $y = y^{(j)}$  die aktuelle Iterierte und  $g = g^{(j)} = g(x_i, \tau_j) = (g_{1,j}, \dots, g_{M-1,j})^T$  der Vektor bestehend aus der Funktion  $g$  aus Formel (11) ausgewertet an den Gitterpunkten. Dann ist wie aus Formel (8) ersichtlich in jedem Zeitschritt das folgende diskrete Problem

$$(Ay - b)^T(y - g) = 0, \quad Ay - b \geq 0, \quad y \geq g \quad (12)$$

zu lösen. Das projektive SOR (sukzessive Überrelaxation) Verfahren entspricht dem normalen SOR Verfahren, wobei nur in jedem Iterationsschritt der Lösungsvektor komponentenweise auf  $g$  projiziert wird, um die Ungleichungen zu erfüllen. Der Parameter  $\omega$  heißt Relaxationsparameter und kann in  $1 \leq \omega \leq 2$  frei gewählt werden. Für viele Probleme kann ein optimales  $\omega$  gefunden werden. In unserem Fall reicht es aus  $\omega = 1$  zu setzen, wodurch das SOR Verfahren zum Gauß–Seidel Verfahren wird.

Der folgende Algorithmus löst das System (12) mit dem projektiven SOR Verfahren.

```

setze  $z^{(0)} = \max\{g^{(j)}, y^{(j)}\}$ 
wiederhole
für  $i = 1, 2, \dots, M - 1$ 

$$r_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} z_k^{(it+1)} - \sum_{k=i+1}^{M-1} a_{ik} z_k^{(it)}$$


$$z_i^{(it+1)} = \max\{g_i^{(j)}, z_i^{(it)} + \omega \frac{r_i}{a_{ii}}\}$$

setze  $it = it + 1$ 
solange  $\|z^{(it)} - z^{(it-1)}\| < \varepsilon$ 
setze  $y^{(j+1)} = z^{(it)}$ 

```

Algorithmus 13: Das projektive SOR Verfahren.

### 3.2 Projektives CG

Eine schnellere Konvergenz läßt sich insbesondere für große Zeitschrittweiten mit dem konjugierte Gradienten Verfahren erreichen. Auch hier existiert eine projektive Variante, die sich wie im folgenden Algorithmus beschrieben, darstellen läßt

```

 $z = \max\{g^{(j)}, y^{(j)}\}$ 
 $e = \|b\|$ 
 $r = b$ 
 $\rho = 0$ 
 $init = 1$ 
solange  $|\rho/e| < eps$ 
für  $i = 1, \dots, M - 1$ 
 $z_i = r_i/a_{ii}$ 
 $\bar{\rho} = \rho$ 
 $\rho = r \cdot z$ 
falls  $init = 1$ 
 $p = z$ 
 $init = 0$ 
sonst
 $p = (\rho/\bar{\rho}) \cdot p + z$ 
 $q = A \cdot p$ 
 $\alpha = \rho/(p \cdot q)$ 
 $z = \max\{g^{(j)}, z + \alpha \cdot p\}$ 
 $r = r - \alpha \cdot q$ 
setze  $y^{(j+1)} = z$ 

```

Algorithmus 14: Das projektive CG Verfahren.

In beiden Verfahren läßt sich der freie Rand in jedem Zeitschritt als derjenige Gitterpunkt  $y_{x_i, \tau_j}$  ermitteln, ab dem

$$y(x_i, \tau_j) > g(x_i, \tau_j) \quad (13)$$

gilt. Nach Rücktransformation muß dann genau  $V(S, t) > (K - S)$  gelten.

## 4 Diskretisierung mit Finiten Elementen

Als letzte Variante wollen wir anstatt der Diskretisierung mit Finiten Differenzen die flexibleren Finiten Elemente betrachten. Hierbei wird die Lösung der Differentialgleichung

$$-y'' = 0 \quad (14)$$

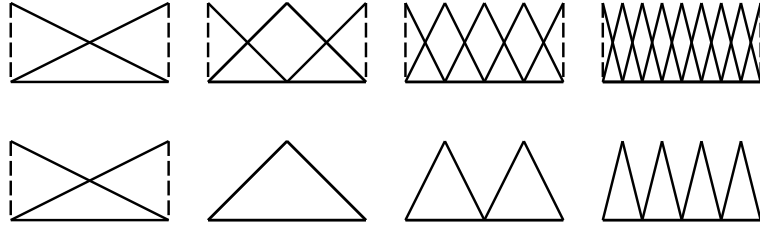


Abbildung 2: Knotenbasis (oben) im Vergleich zur hierarchischen Basis (unten).

auf  $[x_{min}, x_{max}]$  mit den bekannten Randbedingungen variationell gelöst. Dies geschieht durch die Lösung des Gleichungssystems

$$a(u, v) = (f, v) \quad (15)$$

wobei die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  zum Differentialoperator (14) gegeben ist als

$$a(u, v) = - \int_{x_{min}}^{x_{max}} u'(x)v'(x)dx \quad (16)$$

und  $(\cdot, \cdot)$  das Standard  $L_2$  Skalarprodukt

$$(f, v) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)v(x)dx \quad (17)$$

ist. Bei dem Galerkin-Ansatz wird der Gleiche Raum an Basisfunktionen sowohl für die Ansatzfunktionen  $u$  als auch die Testfunktionen  $v$  verwendet, die in Basisdarstellung wie folgt aussehen

$$u(x) = \sum_{i=0}^M c_i \phi_i(x). \quad (18)$$

Wie bei Finiten Differenzen sind die Unbekannten wiederum nur für  $1 \leq i \leq M - 1$  gegeben. Es gibt verschiedene Wahlen für die Basisfunktionen  $\phi$  (den finiten Elementen), von denen stückweise lineare Funktionen die einfachste Wahl sind. Hierbei gilt

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{für } x_{i-1} \leq x < x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{für } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (19)$$

mit entsprechenden Modifikationen am Rand (siehe Abb. 2 oben). Stellt man nun das so entstehende Gleichungssystem (15) explizit auf, so stellt man fest, daß es mit dem Gleichungssystem aus dem Finite Differenzen-Verfahren (nur die Ortsdiskretisierung) bis auf die Vorfaktoren übereinstimmt. Eine flexiblere Möglichkeit besteht in der Verwendung hierarchischer Finiten Elemente, welche adaptive, also lokale Verfeinerung erlauben. Hierbei wird der Ansatzraum (in ähnlicher Weise wie bei der Brownschen Brücke) um eine Level-Komponente  $l$  erweitert und die Ansatz- bzw. Testfunktionen über die Doppelsumme

$$u(x) = \sum_{l=0}^L \sum_{i=1}^{M_l} c_{li} \psi_{li}(x) \quad (20)$$

wobei  $L$  der maximal betrachtete Level darstellt. Hierbei sind die Basisfunktionen wiederum Hutfunktionen, jedoch mit Maschenweite abhängig vom Level  $l$

$$\psi_{li}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{l,i-1}}{x_{li}-x_{l,i-1}} & \text{für } x_{l,i-1} \leq x < x_{li} \\ \frac{x_{l,i+1}-x}{x_{l,i+1}-x_{li}} & \text{für } x_{li} \leq x < x_{l,i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (21)$$

für  $l \geq 1$  mit  $\psi_{0i}(x) = \psi_i(x)$  auf dem größten Gitter (siehe Abb. 2 (oben)). Dabei sind  $x_{l,i}$  die Gitterpunkte auf dem entsprechenden Gitter, im Falle von äquidistanten Gittern also

$$x_{l,i} = x_{min} + (x_{max} - x_{min}) \cdot (2i - 1)2^{-l} \quad (22)$$

mit  $M_l = 2^l - 1$  für  $l \geq 1$  und  $x_{00} = x_{min}$  und  $x_{01} = x_{max}$  mit  $M_0 = 2$  auf dem größten Gitter.

Das Gleichungssystem der hierarchischen Basis ist auf dem ersten Blick voller besetzt als das entsprechende Gleichungssystem der Knotenbasis. Allerdings kann unter Ausnutzung der Verfeinerungseigenschaft der hierarchischen Basis

$$\psi_{li}(x) = \frac{1}{2}\phi_{2i-1}(x) + \phi_{2i}(x) + \frac{1}{2}\phi_{2i+1}(x), \quad (23)$$

wobei  $\phi_i(x)$  die entsprechende Knotenbasis mit der Maschenweite  $2^{-l}(x_{max} - x_{min})$  ist, die Grundoperation Matrix-Vektor Multiplikation von iterativen Verfahren bei der hierarchischen Basis genauso effizient ausgeführt werden wie bei der Knotenbasis.

Der Vorteil der hierarchischen Basis liegt in der Möglichkeit der adaptiven Verfeinerung. Hierbei wird eine lokal an einer Stelle durch Hinzufügen von Basisfunktionen auf feineren Leveln verfeinert, wenn ein sogenannter Fehlerschätzer einen großen Fehler aufzeigt. Umgekehrt kann lokal durch Weglassen von Basisfunktionen vergrößert werden, wenn der Fehlerschätzer einen kleinen Fehler indiziert.

Ein einfacher Fehlerschätzer besteht in der Verwendung der hierarchischen Differenz

$$e_{l,i} = \|(u_{l-1}(x) - u_l(x))|_{[x_{l,i-1}, x_{l,i+1}]}\| \quad (24)$$

also der Differenz der Lösungen bis zu unterschiedlichen Leveln eingeschränkt auf den Träger der Basis  $\psi_{l,i}$ . Der Fehlerschätzer wird dann mit einer vorgegebenen Fehlerschranke  $\eta$  verglichen um die Verfeinerung/Vergrößerung zu steuern.

## 5 Implementierung

Schreiben sie die folgenden Programme. Überprüfen Sie die Verfahren anhand der bereits programmierten Verfahren.

- PSOR(M, A, b, x, g):  
Das projektive SOR Verfahren zur Lösung des linear komplementären Problems (12).
- PCG(M, A, b, x, g):  
Das projektive CG Verfahren zur Lösung des linear komplementären Problems.
- FINITE\_DIFFERENCE(M, N, xmin, xmax, K, T, sigma, r, Method, Eur, Call):  
Das Finite Differenzen-Verfahren zur Lösung der Black-Scholes Gleichung für Amerikanische (Eur=0) Call (Call=1) und Put (Call=0) Optionen mit den übrigen Parametern wie auf Blatt 4.
- FINITE\_ELEMENT(M, N, xmin, xmax, K, T, sigma, r, Method, Eur, Call):  
Das Finite Elemente-Verfahren basierend auf der stückweise linearen Knotenbasis zur Lösung der Black-Scholes Gleichung für Europäische und Amerikanische Call Optionen mit Parametern wie bei obigem Finite Differenzen Verfahren.
- HIER\_FINITE\_ELEMENT(M, N, xmin, xmax, K, T, sigma, r, Method, Eur, Call):  
Das Finite Elemente-Verfahren basierend auf der stückweise linearen hierarchischen Basis mit adaptiver Verfeinerung.

## 6 Beispiele

Alle Aufgabenlösungen müssen wieder schriftlich in elektronischer Form abgegeben werden. Sie können die Lösung per e-mail einschicken ([spanier@math.uni-frankfurt.de](mailto:spanier@math.uni-frankfurt.de)).

Führen Sie mit den Programmen folgende Beispielrechnungen durch:

- (a) Berechnen Sie die Preise einer Amerikanischen Put Option mit  $S_0 = 20$ ,  $K = 21$ ,  $\sigma = 0.15$ ,  $r = 0.03$  und  $T = 2$  mit dem Finite Differenzen-Verfahren basierend auf den drei besprochenen Diskretisierungsverfahren. Verwenden Sie dabei wieder folgende Parameter:  $M = N = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ ,  $x_{min} = -5$ ,  $x_{max} = 5$ . Plotten Sie die Lösung des Crank-Nicolson Verfahrens in einem zweidimensionalen Plot für  $M = N = 64$ .
- (b) Ermitteln Sie den freien Rand  $S_f(t)$  für obiges Problem und plotten Sie seinen Verlauf.

- (c) Berechnen Sie die Preise einer Amerikanischen Put Option mit denselben Parametern wie in Aufgabenteil a) mit dem Finite Elemente–Verfahren mit Knotenbasis und hierarchischer Basis mit adaptiver Verfeinerung. Verwenden Sie die gleichen Parameter wie oben. Plotten Sie die Lösung in einem zweidimensionalen Plot für  $M = N = 64$ .

## Literatur

- [1] R. Seydel, Tools for Computational Finance, Springer, 2002.
- [2] P. Wilmott, S. Howison, H. Dewynne, The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge University Press, 1995.