Algebra

Blatt 11 — 20.01.2015

Aufgabe 41.

(1) Zeigen Sie, daß es bis auf Isomorphie nur zwei nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 8 gibt: die Diedergruppe D_4 und die Quaternionengruppe Q_8.

(2) Sei

$$\alpha = \sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ galoissch ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe.

Tipp: (2) Betrachten Sie den Zwischenkörper $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ und die Minimalpolynome über M von α und seinen $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$-konjugierten $\sigma(\alpha)$. Zeigen Sie $M(\alpha) = M(\sigma(\alpha))$.

Aufgabe 42.

Die **Fittinguntergruppe** $\Phi(G)$ einer Gruppe G besteht aus

$$\Phi(G) = \bigcap_{M \subsetneq G} M,$$

wobei M durch alle maximalen Untergruppen $M \subsetneq G$ läuft. Zeigen Sie:

(1) $\Phi(G)$ ist ein Normalteiler.

(2) Eine Menge von Elementen $S \subseteq G$ erzeugt die Gruppe G genau dann, wenn das Bild von S in $\overline{G} = G/\Phi(G)$ diesen Quotienten $\overline{G}$ erzeugt.

(3) Sei G eine p-Gruppe. Zeigen Sie, daß $G/\Phi(G)$ eine abelsche Gruppe vom Exponenten p ist (also natürlich als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum verstanden werden kann).

(4) Eine Teilmenge $S \subseteq G$ einer p-Gruppe ist genau dann ein minimales Erzeugendensystem, wenn die Bilder der Elemente von S in $G/\Phi(G)$ eine $\mathbb{F}_p$-Basis bilden.

Aufgabe 43.

Bestimmen Sie eine Kompositionsreihen und die Faktoren für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

Tipp: Lassen Sie die Gruppen via

$$\mathrm{SL}_2(K) \subseteq \mathrm{GL}_2(K) \to \mathrm{PGL}_2(K)$$

auf $\mathbb{P}^1(K)$ mittels Möbiustransformationen operieren. Es gilt $\#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = q+1$. Dies führt zu Homomorphismen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \to S_3$ und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \to S_4$.

Aufgabe 44.

Sei K ein Körper, $N \subseteq \mathrm{SL}_2(K)$ die Gruppe der oberen unipotenten Dreiecksmatrizen, $N^t \subseteq \mathrm{SL}_2(K)$ die dazu transponierte Untergruppe, und $D \subseteq \mathrm{SL}_2(K)$ die Gruppe der Diagonalmatrizen mit Determinante 1.

(1) Zeigen Sie

$$\mathrm{SL}_2(K) = \langle N, D, N^t \rangle.$$

(2) Berechnen Sie

(a) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & \\ & a \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ -a^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

(3) Bestimmen Sie die Kommutatorfaktorgruppe von $\mathrm{SL}_2(K)$.

(4) Für welche K ist $\mathrm{SL}_2(K)$ auflösbar?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 27.01.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`

---

20. Januar 2015