Algebra

Blatt 12 — 27.01.2015

Aufgabe 45.

Sei L/K eine Galoiserweiteurng mit der symmetrischen Gruppe S_n als Galoisgruppe. Zeigen Sie, daß es ein normiertes irreduzibles Polynom $f \in K[T]$ vom Grad n gibt, dessen Zerfällungskörper L ist.

Aufgabe 46.

Zeigen Sie, daß eine endliche Gruppe genau dann auflösbar ist, wenn sie eine Kompositionsreihe besitzt deren sämtliche Faktoren zyklisch von Primzahlordnung sind. Gilt dies auch für unendliche Gruppen?

Aufgabe 47. (Artin–Schreier Theorie)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Sei L/K galoissch mit elementar abelscher Galoisgruppe vom Exponenten p, das heißt $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist abelsch und für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ gilt $\sigma^p = \mathrm{id}$ (also ist $\mathrm{Gal}(L/K)$ als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum aufzufassen). Wir errinern an das Artin–Schreier Polynom

$$\wp(T) = T^p - T.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) L wird als Erweiterung von K von der Menge $\{\alpha \in L\ ; \wp(\alpha) \in K\}$ erzeugt.

(2) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(L/K) \times (\wp(L) \cap K)/\wp(K) &\to \mathbb{F}_p \\ (\sigma, a) &\mapsto \sigma(\alpha) - \alpha \text{ für } \alpha \in \wp^{-1}(a). \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Paarung von $\mathbb{F}_p$-Vektorräumen definiert.

(3) Zeigen Sie, daß die Paarung aus (2) eine nicht-ausgeartete Paarung endlich dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorräume ist.

(4) Es gilt $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}((\wp(L) \cap K)/\wp(K), \mathbb{F}_p)$.

(5) Sei Ω ein algebraischer Abschluß von K. Zeigen Sie, daß

$$\left\{ L/K \ ; \ \begin{array}{c} L \subseteq \Omega, \text{ endlich galoissch } /K \text{ mit} \\ \mathrm{Gal}(L/K) \ p\text{-elementar abelsch} \end{array} \right\} \to \left\{ \Delta \subseteq K/\wp(K) \ ; \ \dim_{\mathbb{F}_p}(\Delta) < \infty \right\}$$
$$L \mapsto \wp(L)/\wp(K)$$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 48.

Sei K ein Körper, der für ein ungerades $n \in \mathbb{N}$ die n-ten Einheitswurzeln enthält. Außerdem sei die Charakteristik von K kein Teiler von $2n$.

Sei M/K eine quadratische Erweiterung von K, und sei $L = M(\alpha)$ mit $\alpha^n = a \in M^\times$ eine zyklische Erweiterung vom Grad n. Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die folgenden Aussagen.

(1) L/K ist galoissch.

(2) L/K ist zyklisch.

(3) L/K ist galoisch mit Galoisgruppe isomorph zur Diedergruppe D_n.

Tipp: Verwenden Sie Kummertheorie. Zeigen Sie, daß die der Kummertheorie zugrundeliegenden perfekte Paarung im geeigneten Sinne äquivariant ist unter $\mathrm{Gal}(M/K)$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 03.02.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`
