Algebra

Blatt 13 — 03.02.2014

Aufgabe 49.

Bestimmen Sie die Galoisgruppe der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[T]$:

$$T^3 + T + 1 \quad \text{und} \quad T^3 - 2T^2 - T + 1$$

Aufgabe 50. (Die Gleichung 3. Grades)

Sei K ein Körper und $f(T) = T^3 + a_1T^2 + a_2T + a_3$ ein irreduzibles Polynom aus $K[T]$. Sei L/K der Zerfällungskörper von f über K.

(a) Zeigen Sie, daß L/K nur dann nicht galoissch ist, wenn die Charakteristik von K gleich 3 ist und gleichzeitig a_1 und a_2 verschwinden.

(b) Sei von nun an für den Rest der Aufgabe L/K galoissch. Zeigen Sie, daß die Galoisgruppe von L/K entweder zyklisch von Ordnung 3 oder isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 auf drei Elementen ist.

(c) Seien x_1, x_2, x_3 die drei Nullstellen von f in L. Sei

$$\delta := (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

Zeigen Sie, daß $\Delta := \delta^2$ ein Element von K ist.

(d) Sei $\varphi : \mathrm{Gal}(L/K) \to S_3$ der Gruppenhomomorphismus, welcher die Wirkung von Automorphismen auf der Menge der Nullstellen von f beschreibt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(ii) φ identifiziert $\mathrm{Gal}(L/K)$ mit $A_3 \subseteq S_3$.

(iii) $\delta \in K$.

(iv) Δ besitzt eine Quadratwurzel in K.

(e) Sei die Charakteristik des Körpers K von 3 verschieden. Dann kann man durch die Translation $T \mapsto T - \frac{1}{3}a_1$ das Polynom auf die Form $T^3 + aT + b$ normieren, ohne den Zerfällungskörper und die Galoisgruppe zu ändern. Weisen Sie die folgende Formel nach:

$$\Delta = -4a^3 - 27b^2.$$

Aufgabe 51.

Sei $\mathrm{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \ ; \ |z| = 1\}$ die Gruppe der komplexen Zahlen von Norm 1. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung $e : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathrm{S}^1$ definiert durch

$$e(\alpha) := e^{2\pi i \alpha}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus, dessen Bild die Gruppe der Einheitswurzeln ist.

(2) Die Komposition mit e aus (1) definiert für jede abelsche Torsionsgruppe A (jedes $a \in A$ hat endliche Ordnung) einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathrm{S}^1).$$

(3) Berechnen Sie $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathrm{S}^1)$ und $\mathrm{Hom}(\mathrm{S}^1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(4) Die Aussage von (2) gilt nicht für $A = \mathbb{Z}$ und auch nicht für $A = \mathrm{S}^1$

Aufgabe 52.

Sei $i : A \subseteq B$ eine Inklusion abelscher Gruppen. Zeigen Sie, daß jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sich zu einem Gruppenhomomorphismus $\psi : B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ fortsetzt:

$$\psi \circ i = \varphi.$$

Tipp: Nutzen Sie das Lemma von Zorn.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 10.02.2014, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/52065465/Algebra-WS2014_15`
