GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Stochastische Numerik
SS 2015
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 1

Abgabe bis Mittwoch, 6.5.2015

Aufgabe 1:
Sei X eine normal verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2, also $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}\Big((X-\mu)^{2k+1}\Big) = 0$ und $\mathbb{E}\Big((X-\mu)^{2k}\Big) = (2k-1)!!\,\sigma^{2k}$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots\}$ gilt.

Hinweis: Die Doppelfakultät $n!!$ für $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$n!! := \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 1 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zusätzlich definiert man $0!! = 1$ und $(-1)!! = 1$.

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 2: [Verschiebungssatz]
Sei X eine Zufallsvariable. Zeigen Sie dass $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$ gilt.

Punkte: $\boxed{5}$

Aufgabe 3: [Gleichung von Bienayme]
Seien $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, quadratisch integrierbare, paarweise unkorrelierte, reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie dass $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)$ gilt.

Punkte: $\boxed{5}$

Aufgabe 4: [Box-Muller Methode]
Seien U_1 und U_2 unabhängige und auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die durch die Box-Muller Methode gemäß der Transformationen

$$N_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2),$$
$$N_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

erzeugten Zufallsvariablen N_1 und N_2 unabhängig und $N(0,1)$ verteilt sind.

Punkte: $\boxed{10}$