Prof. Dr. Thomas Gerstner
Sebastian Becker
Fachbereich Mathematik
Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Sommersemester 2015

Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Abgabe 05.05.2014

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*
Betrachte die lineare Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = g(t)x + b(t)$$

für $t \in I \subset \mathbb{R}$ *und* $g, h : I \to \mathbb{R}$ *stetig.*

a) Zeigen Sie: Ist $G : I \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* g*, dann ist*

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} e^{-G(s)} b(s)\, ds + C \right) e^{G(t)}$$

mit $t_0 \in I$ *und* $C \in \mathbb{R}$ *eine Lösung der DGL.*

b) Geben Sie die Lösung für des zugehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ *an.*

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie das $x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}$ *genau dann (und nur dann) eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(t)\frac{dx}{dt} + h(t)x(t) = 0$$

ist wenn $p(t)$ *die Ricattische Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dt} + y(t)^2 + g(t)y(t) + h(t) = 0$$

löst.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*
Sei

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

eine skalare DGL n-ter Ordnung mit reellen Koeffizienten a_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) *Zeigen Sie das für jede Nullstelle λ des Polynoms*

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

die Funktion $x(t) = e^{\lambda t}$ eine Lösung der obigen DGL ist. (Hinweis: Setzen Sie $D^i = \frac{d^i}{dt^i}$.)

b) *Seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ zwei verschiedene Nullstellen von P und $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ die zugehörigen Lösungen. Zeigen Sie dass x_1 und x_2 linear unabhängig sind.*

Aufgabe 4. *(12 Punkte)*
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a)
$$\left(1 + t^2\right) \frac{dx}{dt} + tx = 2t$$

b)
$$\frac{dx}{dt} - x = tx^2$$

c)
$$\sin t \frac{dx}{dt} - x \cos t = \sin^2 t, \qquad t \in (0, \pi)$$