Prof. Dr. Thomas Gerstner
Sebastian Becker
Fachbereich Mathematik
Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Sommersemester 2015

Differentialgleichungen

Übungsblatt 5

Abgabe 26.05.2014

Aufgabe 1.
Geben Sie für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}, \qquad x(0) = -1$$

alle Lösungen auf dem Intervall $I = [0, \infty)$ an und begründen Sie warum der Existenz- und Eindeutigkeitssatz nicht verletzt wird.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie: Wenn $x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} \quad = \quad ax - bx^2, \quad a, b > 0$$

mit $x(0) \in (0, \frac{a}{b})$ ist, dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $0 \leq x(t) \leq \frac{a}{b}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$,

b) $x(t) \to \frac{a}{b}$ *für* $t \to \infty$, $\quad x(t) \to 0$ *für* $t \to -\infty$,

c) $\frac{dx(t)}{dt} > 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DGL für die Parameter $a = 4, b = 4$.

Aufgabe 3.
Sei $1 \leq p < \infty$ und $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Gegeben seien die Funktionen $g_n \in \mathcal{C}(I)$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$g_n(x) := \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx, & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(g_n)_n$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_p)$ ist. Zeigen Sie weiter, dass $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_p)$ kein Banachraum ist. Die Norm $\|\cdot\|_p$ ist gegeben durch

$$\|f\|_p := \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$