Prof. Dr. Thomas Gerstner
Sebastian Becker
Fachbereich Mathematik
Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Sommersemester 2015

Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

Abgabe 02.06.2015

Aufgabe 1.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen Kontraktionen sind und geben Sie gegebenenfalls den Fixpunkt an:

a)

$$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad f(x) = \frac{x+\frac{1}{2}}{x+1}.$$

b)

$$f\colon [1,\infty) \to [1,\infty), \quad f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie mit Hilfe sukzessiver Approximationen, also durch Berechnung von

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\, ds, \qquad n \in \mathbb{N}$$

mit $\varphi_0(t) = x_0$, die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

a)

$$\dot{x} = tx, \qquad x(0) = 1$$

b)

$$\dot{x} = x^2, \qquad x(0) = 1, \qquad |t| < 1$$

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass jedes Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sin(tx), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 4.
Seien $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *und* $I := [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. *Mit* $\mathcal{C}$ *wird der Vektorraum aller stetigen Funktionen* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *bezeichnet und sei* $A \subset \mathcal{C}$ *abgeschlossen. Zusätzlich sei* $V := \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n : \|x-c\| \leq r\}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, *und sei* $f : V \to \mathbb{R}^n$ *eine stetige Funktion die in* V *einer Lipschitz-Bedingung mit* $L > 0$ *genügt. Betrachten Sie nun die Abbildung* $T : A \to \mathcal{C}$ *definiert durch*

$$(T\varphi)(t) := c + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds, \qquad t \in I.$$

Zeigen Sie dass T *stetig ist und dass für je zwei Funktionen* $\varphi, \psi \in A$ *gilt*

$$\|T\varphi - T\psi\| \leq L\varepsilon \, \|\varphi - \psi\| \, .$$