



Übung 4

Abgabe bis Mittwoch, 17.6.2015

Aufgabe 1: Gegeben sei die skalare stochastische Differentialgleichung

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s$$

für $t \in [t_0, T]$ wobei die Koeffizienten global Lipschitz stetig sind. Zeigen Sie, dass für die starke Lösung $t \rightarrow X_t$

$$\mathbb{E} \left[|X_t - X_s|^2 \right] \leq K (t - s)$$

für $s, t \in [t_0, T]$ und $K > 0$ gilt.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass das vereinfachte Euler-Verfahren nicht stark und das stochastische Euler-Verfahren mit $\Delta W \sim N(0, \Delta)$ stark konsistent ist.

Aufgabe 3: Sei $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$ ein Wiener Prozess. Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel das

$$d(\cos(W_t)) = -\frac{1}{2} \cos(W_t) dt - \sin(W_t) dW_t$$

und

$$d(\sin(W_t)) = -\frac{1}{2} \sin(W_t) dt + \cos(W_t) dW_t$$

gilt.

Aufgabe 4: Sei $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$ ein Wiener Prozess und sei

$$m_k(t) := \mathbb{E}(W_t^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel

$$m_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t m_{k-2}(s) ds$$

für $k \geq 2$.

Aufgabe 5: [Konvergenzordnung des Euler-Verfahrens]

Gegeben sei die SDE

$$dX_t = X_t dt + X_t dW_t$$

für $t \in [0, 1]$, $X_0 = 1$. Sie sollen diese SDE mit Hilfe des stochastischen Euler Verfahrens für die Schrittweiten $\Delta_i = 2^{-i}$, $i = 4, 5, \dots, 14$ simulieren und aus den Fehlern zu den jeweiligen Schrittweiten einen loglog-Plot der Konvergenzordnung erzeugen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- 1) Erzeugen Sie einen Wiener-Prozess mit der kleinsten Schrittweite.
- 2) Berechnen Sie die exakte Lösung $X_1^{e,n}$ der SDE mit diesem Wiener Prozess.
- 3) Simulieren Sie nun die approximierten Lösungen $X_1^{\Delta_i,n}$ mit dem Euler Verfahren. Die Schrittweiten sind so gewählt, dass sich der Wiener-Prozess für die Simulationen leicht aus den feineren Schrittweiten ableiten lässt.
- 4) Berechnen Sie den Fehler $err^{\Delta_i,n} = \left| X_1^{e,n} - X_1^{\Delta_i,n} \right|^2$ nach jeder Simulation.
- 5) Wiederholen Sie die Schritte 1-4 etwa $k = 25$ mal und mitteln Sie am Ende die Fehler, also $err^{\Delta_i} = \left(\frac{\sum_{n=1}^k err^{\Delta_i,n}}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$.
- 6) Erzeugen Sie einen loglog-Plot, wobei Sie auf der Abszissenachse die Anzahl der Schritte und auf der Ordinatenachse den Fehler auftragen.
- 7) Zeichnen Sie noch die Ordnungslinie $\frac{1}{2}$ ein und verschieben Sie diese so auf der Ordinatenachse, dass sie zu Ihren Daten passt.