Übung 5

Abgabe bis Mittwoch, 1.7.2015

Aufgabe 1: [Milstein-Verfahren]
Wir wissen, dass das stochastische Euler-Verfahren mit starker Ordnung $\frac{1}{2}$ konvergiert. Ein weiteres Verfahren wurde von Milstein vorgeschlagen und ist gegeben durch:

$$Y_{n+1} = Y_n + f(t_n, X_n)\Delta + g(t_n, X_n)\Delta W_n + \frac{1}{2} g(t_n, X_n) g'(t_n, X_n) \left((\Delta W_n)^2 - \Delta \right)$$

für $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Dieses Verfahren konvergiert mit starker Ordnung 1.

a) Zeigen Sie, dass das Milstein-Verfahren für SDGs mit additivem Rauschen, also SDGs vom Typ

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + \sigma\, dW_t$$

für $t \geq 0$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ im allgemeinen nicht besser sein kann als das stochastische Euler-Verfahren.

b) Gegeben Sei die SDG

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t\, dt + X_t\, dW_t$$

für $t \geq 0$ und $X_0 = 1$. Zeigen Sie, das $X_t = e^{W_t}$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist.

c) Fügen Sie ihrer Simulation von Aufgabe 5 auf Blatt 3 das Milstein-Verfahren hinzu und zeichnen Sie zusätzlich die Ordungslinie 1 ein.

Aufgabe 2: Gegeben sei die skalare stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} X_{mh} &= \xi + \int_0^{mh} f(X_s)\, ds + \int_0^{mh} g(X_s)\, dW_s \\ &= \xi + \sum_{l=0}^{m-1} \int_{lh}^{(l+1)h} f(X_s)\, ds + \sum_{l=0}^{m-1} \int_{lh}^{(l+1)h} g(X_s)\, dW_s \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

für $mh \in [0, T]$, $m = \{0, 1, \ldots, M\}$ und $h = \frac{T}{M}$, $M \in \mathbb{N}$ wobei die Koeffizienten global Lipschitz-stetig sind. Das stochastische Euler-Verfahren für diese SDE ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_m &= Y_{m-1} + hf(Y_{m-1}) + g(Y_{m-1})\Delta W_{m-1} \\ &= \xi + \sum_{l=0}^{m-1} \int_{lh}^{(l+1)h} f(Y_l)\, ds + \sum_{l=0}^{m-1} \int_{lh}^{(l+1)h} g(Y_l)\, dW_s \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

für alle $m = \{0, 1, \ldots, M\}$. Zusätzlich definert man

$$Z_m := \xi + \sum_{l=0}^{m-1} \int_{lh}^{(l+1)h} f(X_{lh})\, ds + \sum_{l=0}^{m-1} \int_{lh}^{(l+1)h} g(X_{lh})\, dW_s \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $m = \{0, 1, \ldots, M\}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_{mh} - Y_m|^2 \right] &\leq 2\mathbb{E}\left[|X_{mh} - Z_m|^2 \right] + 2\mathbb{E}\left[|Z_m - Y_m|^2 \right] \\ &\leq \ldots \\ &\leq C_1 h + C_2 h \sum_{l=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[|X_{lh} - Y_l|^2 \right] \end{aligned}$$

für alle $m = \{0, 1, \ldots, M\}$.

Aufgabe 3: Gegeben sei die skalare stochastische Differentialgleichung

$$X_{mh} = \xi + \int_0^{mh} f(X_s)\,ds + \int_0^{mh} g(X_s)\,dW_s \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für $mh \in [0,T]$, $m = \{0,1,\dots,M\}$ und $h = \frac{T}{M}$, $M \in \mathbb{N}$ wobei die Koeffizienten global Lipschitz-stetig sind. Zeigen Sie, dass das stochastische Euler-Verfahren Y_m, $m = \{0,1,\dots,M\}$, $M \in \mathbb{N}$, mit starker Ordnung $\frac{1}{2}$ konvergiert. Verwenden Sie dabei das Gronwall-Lemma:

Sei $M \in \mathbb{N}$ und $a \in [0,\infty)$. Sei zusätzlich $b_0, b_1, \dots, b_{M-1} \in [0,\infty)$ und $e_0, e_1, \dots, b_M \in [0,\infty)$ so dass

$$e_k \leq a + \sum_{l=0}^{k-1} e_l b_l$$

für alle $k \in \{0,1,\dots,M\}$. Dann gilt

$$e_k \leq a \cdot \prod_{l=0}^{k-1} (1 + b_l) \leq a \cdot e^{\left(\sum_{l=0}^{k-1} b_l\right)}$$

für alle $k \in \{0,1,\dots,M\}$.