Vorsemesterkurs
Programmieren mit Scilab

Aufgabe 5.1

In der letzten Übung haben Sie die Rechteckregel in die `integriere(f,a,b,N)` Funktion implementiert. Die Sehnentrapezregel approximiert das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ durch

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \sum_{n=1}^{N-1} f(a+nh)\right),$$

die Tangententrapezregel durch

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{n=1}^{N} f(a + \tfrac{h(2n-1)}{2})$$

mit $h = \frac{(b-a)}{N}$.

a) Implementieren Sie die Funktionen `s_trapez(f,a,b,N)` und `t_trapez(f,a,b,N)` wobei Sie Schleifen vermeiden sollten.

b) Berechnen Sie den exakten Wert von $\int_0^1 x^2\,dx$ ohne den Computer! Berechnen Sie nun die Fehler des exakten Wertes im Vergleich mit ihren Funktion `integrate`, `s_trapez` und `t_trapez` für $N \in \{10, 20, \ldots, 10^4\}$ und speichern Sie die Ergebnisse in einer Matrix.

c) Verwenden Sie den `plot2d` Befehl um die jeweiligen Fehler aus Teilaufgabe b) in ein einziges Log-Log Diagramm zu plotten, wobei auf der "x"-Achse die N-Werte und auf der "y"-Achse der Fehler aufgetragen werden soll. Beschriften Sie die Graphik und exportieren Sie sie in eine Datei. Was können Sie nun über die einzelnen Verfahren sagen?

Aufgabe 5.2

Das Landau-Symbol $O(\cdot)$ wird verwendet um die Komplexität eines Algorithmus anzugeben. Dabei ist man nur am asymptotischen Verhalten interessiert. Oftmals wird damit ein Maß für die Anzahl der Elementarschritte in Abhängigkeit von der Größe der Eingangsvariablen angegeben. Für zwei Algorithmen f und g verwendet man die Notation $f \in O(g)$ falls die Laufzeit von f nicht wesentlich schneller wächst als die Laufzeit von g. $O(g)$ gibt also eine asymptotisch obere Schranke an. Die Definition lautet:

$$0 \le \limsup_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty.$$

a) Implementieren sie eine Funktion `matrix_mult`, die die Matrizenmultiplikation auf naive Weise durchführt (3 Schleifen).

b) Eine Möglichkeit die Laufzeit zu analysieren ist die Anzahl der Berechnungsschritte zu zählen. Dabei werden nur die wesentlichen Schritte beachtet. Analysieren sie die Laufzeit der des Algorithmus aus a) indem sie die Gesamtanzahl der Schleifendurchläufe für die Eingabe zweier $n \times n$-Matrizen zählen. Geben sie diese Laufzeit in der $O(\cdot)$ Notation in Abhängigkeit von n an.

c) Messen sie die Laufzeit mit den Funktionen `tic()` und `toc()`. Nutzen sie einfache Matrizen der Größe $2^i \times 2^i$ für $i = 4, \ldots, 9$ für ihre Messung und speichern sie die Laufzeiten in einem Vektor. Plotten die Laufzeiten mittels der `plot2d` Funktion wobei sie beide Achsen logarithmisch skalieren sollen. Vergleichen sie ihre Graphik mit ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe b).

d) Messen sie nun noch die Laufzeit der Scilab-Matrix-Multiplikation `*` und stellen sie ihr Ergebnis in der gleichen Graphik dar. Wie schneidet ihre Multiplikation im Vergleich zu Scilab ab?

Aufgabe 5.3

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$ Nach dem Zwischenwertsatz hat f in (a, b) mindestens eine Nullstelle. Schreiben Sie eine Funktion `nullstelle(f,a,b,tol)`, die eine Nullstelle x_0 von f in $[a, b]$ mit Genauigkeit `tol` approximiert. Die Funktion soll also ein Ergebnis `x` liefern, das $|\mathtt{x} - x_0| \leq \mathtt{tol}$ erfüllt.

Benutzen Sie dazu die sogenannte Intervallhalbierungsmethode: Sie zerlegen das ursprüngliche Intervall in zwei Teilintervalle $[a, m]$ und $[m, b]$ mit $m := \frac{a+b}{2}$. Ist $f(m) = 0$, so haben Sie die Nullstelle gefunden und können m zurückgeben und die Funktion beenden. Ist $f(m) > 0$, so wissen Sie, dass die gesuchte Nullstelle im Intervall $[a, m]$ zu finden ist, anderenfalls liegt sie in $[m, b]$.

Durch wiederholte Anwendung dieses Prinzips kommen Sie der Lösung immer näher. (Machen Sie sich klar, dass man daher auch diese Aufgabe entweder durch eine Schleife oder rekursiv lösen kann.) Überlegen Sie sich, wann Sie den Prozess beenden dürfen, und verwenden Sie ein entsprechendes Abbruchkriterium.

Testen Sie Ihre Lösung an der Sinusfunktion mit Daten $\mathtt{a} = -1$, $\mathtt{b} = 0.5$ und $\mathtt{tol} = 1e - 10$ sowie $\mathtt{a} = 0.5$, $\mathtt{b} = -1$ und $\mathtt{tol} = 1e - 6$.