

Elementarmathematik 1

Übungsblatt 2

Wochenaufgabe 1 (9 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Wochenaufgabe 2 (7 Punkte)

Eine Menge von Geraden in der Ebene befindet sich per Definition *in allgemeiner Lage*, wenn je zwei von ihnen nicht parallel sind und je drei von ihnen sich nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ je n Geraden in allgemeiner Lage die Ebene in $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Teile unterteilen.

Abgabe der Wochenaufgaben bis Montag, den 02.11.2015 um 10:15 Uhr in den Einwurfkasten Ihrer Tutorin/Ihres Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Straße 6.

Plenumsaufgabe 1

Beweisen Sie jeweils durch vollständige Induktion.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

Plenumsaufgabe 2

Finden Sie den Fehler im folgenden Induktionsbeweis.

Behauptung:

Alle Schafe haben die gleiche Farbe.

Beweis durch vollständige Induktion:

Es ist $A(n)$ die Aussage: Je n Schafe haben untereinander die gleiche Farbe.

Induktionsanfang: $A(1)$ ist richtig, denn ein einzelnes Schaf hat die gleiche Farbe wie es selbst.

Induktionsschluss: Wir nehmen an, $A(n)$ ist richtig für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$. Seien $n + 1$ Schafe gegeben. Wir nummerieren sie mit den natürlichen Zahlen $1, \dots, n + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $A(n)$ richtig, also haben je n Schafe untereinander die gleiche Farbe. Demnach haben sowohl die Schafe mit den Nummern $1, 2, \dots, n$, als auch die Schafe mit den Nummern $2, \dots, n, n + 1$ untereinander die gleiche Farbe. Aber dann haben auch alle $n + 1$ Schafe die gleiche Farbe. \square

Die Plenumsaufgaben werden während der Übungen in Kleingruppen bearbeitet.