

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Rechenregeln für unbeschränkte Operatoren)

Seien A , B und C (möglicherweise unbeschränkte) Operatoren. Zeigen Sie die Rechenregeln:

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= A + (B + C), \\ (AB)C &= A(BC), \\ (A + B)C &= AC + BC, \\ A(B + C) &\supseteq AB + AC.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Moore-Penrose-Inverse der Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die *Shiftoperatoren* $W, S : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$,

$$W : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad S : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

Zeigen Sie, dass $W, S \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$ und berechnen Sie $\|W\|_{l^2(\mathbb{N})}$, $\|S\|_{l^2(\mathbb{N})}$ sowie die Moore-Penrose-Inversen W^+ und S^+ .

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Abbildung $A : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, $Ax := y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = \frac{1}{n}x_n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- $A \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$, $\|A\|_{\mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))} = 1$
- $l^2(\mathbb{N}) = \overline{\mathcal{R}(A)} \supsetneq \mathcal{R}(A)$
- $\mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A)$ und $A^+y = x$, wobei $x_n = ny_n$.

Ausgabe: Donnerstag, 05.11.15.

Besprechung: Donnerstag, 19.11.15.

Schriftliche Abgaben zu **Aufgabe 4** können am **Donnerstag, den 19.11.2015** vor der Übung abgegeben werden.