Prof. Dr. A. Werner
Kolja Hept

WS 2015/2016
Frankfurt/M., 11.12.2015

Elementarmathematik 1

Übungsblatt 9

Wochenaufgabe 1 (10 Punkte)

a) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $b_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Dezimalbruch

$$a_n := 0, b_1 ... b_n \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

b) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $b_1, ..., b_k \in \{0, 1, ..., 9\}$. Zeigen Sie

$$0, \overline{b_1 ... b_k} = \frac{b_1 ... b_k}{\underbrace{99...9}_{k-\mathrm{mal}}}.$$

Dabei seien Zähler und Nenner der rechten Seite in der Dezimaldarstellung gegeben.

Wochenaufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

keine Cauchyfolge ist. (*Tipp: Betrachten Sie die Differenz* $a_{2n} - a_n$.)

Abgabe der Wochenaufgaben **ausnahmsweise bis Freitag**, den 18.12.2015 um 12:00 Uhr in den Einwurfkasten Ihrer Tutorin/Ihres Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Straße 6.

Prof. Dr. A. Werner
Kolja Hept

WS 2015/2016
Frankfurt/M., 11.12.2015

Plenumsaufgabe 1 (Geometrische Interpretation des Heron-Verfahrens)

In der Vorlesung haben wir für positives $A \in \mathbb{Q}$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachtet, wobei x_1 ein beliebiger rationaler Startwert mit $x_1^2 > A$ und sonst

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

definiert war.

a) Zeigen Sie, dass diese Folge streng monoton fällt, dass also $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Gegeben sei nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ das Rechteck R_n mit einer Seitenlänge x_n und mit Flächeninhalt A. Skizzieren Sie die Rechtecke R_1, R_2, R_3, R_4 für $x_1 = 10$ und $A = 10$ (ein sinnvoller Maßstab wäre z.B. 1LE $\hat{=}$1cm). Was fällt Ihnen auf? Wie deckt sich das mit den Erkenntnissen aus der Vorlesung?

Plenumsaufgabe 2

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Relation auf der Menge aller rationalen Cauchyfolgen ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert) tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

Die Plenumsaufgaben werden während der Übungen in Kleingruppen bearbeitet.