Prof. Dr. A. Werner
Kolja Hept

WS 2015/2016
Frankfurt/M., 18.12.2015

Elementarmathematik 1

Übungsblatt 10

Wochenaufgabe 1 (8 Punkte)

a) Sei K ein Körper. Beweisen Sie folgende Gradformel für Polynome über K: Für alle $f(X), g(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ gilt

$$\mathrm{grad}(f(X) \cdot g(X)) = \mathrm{grad}(f(X)) + \mathrm{grad}(g(X)).$$

b) Zeigen Sie, dass für alle Polynome $p(X), f(X) \in K[X]$ mit $f(X) \neq 0$ die Darstellung

$$p(X) = q(X)f(X) + r(X)$$

mit $\mathrm{grad}(r(X)) < \mathrm{grad}(f(X))$ eindeutig ist.

(*Tipp: a) und Plenumsaufgabe 1 verwenden.*)

Wochenaufgabe 2 (8 Punkte)

a) Warum gilt in jedem Polynomring $K[X]$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ immer $(X - 1) \mid (X^n - 1)$?

b) Bestimmen Sie $t_2(X)$ und $t_3(X)$ mit

$$(X - 1)t_2(X) = X^2 - 1$$

und

$$(X - 1)t_3(X) = X^3 - 1.$$

c) Bestimmen Sie allgemein $t_n(X)$ mit

$$(X - 1)t_n(X) = X^n - 1.$$

(Mit Beweis!)

Abgabe der Wochenaufgaben bis Montag, den 18.01.2016 um 10:15 Uhr in den Einwurfkasten Ihrer Tutorin/Ihres Tutors im 3. Stock, Robert-Mayer-Straße 6.

Prof. Dr. A. Werner
Kolja Hept

WS 2015/2016
Frankfurt/M., 18.12.2015

Plenumsaufgabe 1

Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass der Polynomring $K[X]$ nullteilerfrei ist, dass also gilt: Wenn $f(X) \cdot g(X) = 0$ gilt für zwei $f(X), g(X) \in K[X]$, dann ist $f(X) = 0$ oder $g(X) = 0$.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass Körper nullteilerfrei sind.

Plenumsaufgabe 2

Bestimmen Sie in $\mathbb{Q}[X]$ für

$$p(X) = 4X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X$$

und

$$f(X) = X^2 - 1$$

die Polynome $q(X), r(X) \in K[X]$ mit $\mathrm{grad}(r(X)) < \mathrm{grad}(f(X))$ und

$$p(X) = q(X)f(X) + r(X).$$

Die Plenumsaufgaben werden während der Übungen in Kleingruppen bearbeitet.