Prof. Dr. A. Werner
Kolja Hept

WS 2015/2016
Frankfurt/M., 18.12.2015

Elementarmathematik 1

Freiwillige Zusatzaufgaben zur Vertiefung

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto \frac{2x-4}{x-1}$$

injektiv ist. Wie muss man den Wertebereich wählen, damit die Abbildung sogar bijektiv ist? Bestimmen Sie für diesen Fall die Umkehrabbildung.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = n^4.$$

Aufgabe 3

Im Hexadezimalsystem (16-adische Entwicklung) werden oft die ersten Buchstaben unseres Alphabets verwendet, um die Zahlen größer als 9 als Ziffern darzustellen. Eine Hexadezimalzahl wird also dargestellt als

$$[b_n b_{n-1} ... b_1 b_0]_{16} = \sum_{i=0}^{n} b_i 16^i$$

mit $b_i \in \{0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F\}$ mit $A = 10, B = 11, ..., F = 15$. Es ist also z.B. $46 = [2E]_{16}$.

a) Berechnen Sie die Hexadezimaldarstellung der natürlichen Zahlen (angegeben im Dezimalsystem) 255, 256 und 4077.

b) Berechnen Sie die Darstellung von $[1A]_{16}$, $[123]_{16}$ und $[BAD]_{16}$ im Dezimalsystem.

c) Berechnen Sie die Summe der Zahlen aus b) und bleiben Sie dabei im Hexadezimalsystem.

Aufgabe 4

Sei $M = \{a, b, c, d, e\}$. Welche der folgenden Mengen definieren eine Äquivalenzrelation auf M?

a) $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$

b) $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f)\}$

c) $R_3 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c),(d,d),(e,e)\}$.

d) $R_4 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(e,e)\}$.

e) $R_5 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$.

f) $R_6 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$.

g) $R_7 = M \times M$.

Aufgabe 5

a) Entscheiden Sie ohne Verwendung elektronischer Hilfsmittel, welche der Zahlen 123467, 172436 und 364127 ohne Rest durch 11 teilbar ist.

b) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen n mit $-10 \leq n \leq 20$, $n \equiv 2 \mod 5$ und $n \equiv 1 \mod 3$.

Aufgabe 6

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen ein $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ konvergiert. Wo findet sich im Skript ein Beweis dafür, dass dann auch auch die Folge $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ konvergiert und der Grenzwert gerade a^{-1} ist?

b) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{\left(7\frac{(-1)^n}{n} + 4\right)\left(15 - \frac{2-n^2}{n^3}\right)}{\left(3 - \frac{5}{n}\right)\left(\frac{1000000}{n} + 10\right)}$$

und falls ja, wie lautet der Grenzwert?

Aufgabe 7

Seien $c_1, ..., c_l, b_1, ..., b_k \in \{0, 1, ..., 9\}$.
Dann definieren wir den **gemischt-periodischen Dezimalbruch**

$$0, c_1...c_l\overline{b_1...b_k} := \sum_{i=1}^{l} c_i 10^{-i} + 10^{-l} \cdot 0, \overline{b_1...b_k}.$$

Berechnen Sie die Darstellung des gemischt-periodischen Dezimalbruches

$$0, 06\overline{81}$$

als vollständig gekürzten Bruch.

Keine Abgabe. Die Aufgaben werden nicht in den Tutorien vorgerechnet. Die Lösungen werden in der zweiten Januarwoche online veröffentlicht.