Prof. Dr. A. Werner
Kolja Hept

WS 2015/2016
Frankfurt/M., 12.01.2016

Elementarmathematik 1

Freiwillige Zusatzaufgaben zur Vertiefung
Lösungen - meistens wirklich nur die Ergebnisse!

Aufgabe 1

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt

$$\begin{array}{rccc} & f(x_1) & = & f(x_2) \\ \Leftrightarrow & (2x_1-4)(x_2-1) & = & (2x_2-4)(x_1-1) \\ \Leftrightarrow & 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 + 4 & = & 2x_2x_1 - 2x_2 - 4x_1 + 4 \\ \Leftrightarrow & -2x_1 - 4x_2 & = & -2x_2 - 4x_1 \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & x_2 \end{array},$$

und damit ist f injektiv.
Ein $y \in \mathbb{Q}$ liegt genau dann im Bild unter f, wenn es ein $x \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ gibt mit $y = \frac{2x-4}{x-1}$, und dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $x \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ gibt mit

$$x(y-2) = y-4.$$

Für $y = 2$ ist dies nicht möglich (warum?) und für $y \neq 2$ erfüllt $x = \frac{y-4}{y-2}$ diese Gleichung. Also ist

$$g : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \to \mathbb{Q} \setminus \{2\}, \quad x \mapsto \frac{2x-4}{x-1}$$

bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$g^{-1} : \mathbb{Q} \setminus \{2\} \to \mathbb{Q} \setminus \{1\}, \quad x \mapsto \frac{x-4}{x-2},$$

wie man leicht nachweist, indem man

$$\frac{2 \cdot \frac{x-4}{x-2} - 4}{\frac{x-4}{x-2} - 1} = x \quad \text{und} \quad \frac{\frac{2x-4}{x-1} - 4}{\frac{2x-4}{x-1} - 2} = x$$

(also $g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}\setminus\{2\}}$ und $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}\setminus\{1\}}$) nachrechnet.

Aufgabe 2

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^4.$$

Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = n^4$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) &= \sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 \\ &= n^4 + 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 6(n^2 + 2n + 1) + 4(n+1) - 1 \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ &= (n+1)^4 \end{aligned}$$

Prof. Dr. A. Werner
Kolja Hept

WS 2015/2016
Frankfurt/M., 12.01.2016

Aufgabe 3

a) $255 = [FF]_{16}$, $256 = [100]_{16}$ und $4077 = [FED]_{16}$.

b) $[1A]_{16} = 26$, $[123]_{16} = 291$ und $[BAD]_{16} = 2989$ im Dezimalsystem.

c) $[1A]_{16} + [123]_{16} = [CEA]_{16}$

Aufgabe 4

R_1, R_5 und R_7 definieren eine Äquivalenzrelation auf M.

Aufgabe 5

a) Nur 172436 ist ohne Rest durch 11 teilbar ist (Elferregel).

b) -8 und 7

Aufgabe 6

a) Im Beweis von Satz 7.5 i) (Existenz des multiplikativen Inversen einer Cauchyfolge $\neq 0$), denn jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge und die Folge $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem Beweis.

b) Ja, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, da sie wegen

$$a_n := \frac{\left(7\frac{(-1)^n}{n} + 4\right)\left(15 - 2(\frac{1}{n})^3 + \frac{1}{n}\right)}{\left(3 - \frac{5}{n}\right)\left(\frac{1000000}{n} + 10\right)}$$

aus konvergenten Folgen zusammengesetzt ist und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{(7\cdot 0 + 4)(15 - 2\cdot 0^3 + 0)}{(3 - 5\cdot 0)(1000000\cdot 0 + 10)} = 2.$$

Aufgabe 7

Es gilt

$$0,06\overline{81} = 0\cdot 10^{-1} + 6\cdot 10^{-2} + 10^{-2}\cdot 0,\overline{81} = \tfrac{3}{44}.$$