Einführung in die Numerik
Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter
Numerische Analysis - Numerik partieller DGL

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

9. Übungsblatt (erschienen am 08.12.2015)

Aufgabe 9.1 (schriftliche Aufagbe)[6 Punkte]

(a) Unter der Spur(B) einer Matrix $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ versteht man die Summe aller Diagonalelemente von B. Beweisen Sie, dass für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{Spur}(A^*A) = \sum_{\lambda\in\sigma(A^*A)} \lambda$$

gilt, wobei $\sigma(A^*A)$ das Spektrum von A^*A bezeichnet. Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$ für alle $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ gilt.

(b) Zeigen Sie bitte:

(i) $\mathrm{cond}_2(U) = 1$ für alle unitären Matrizen U.

(ii) $\mathrm{cond}_2(A) \leq \mathrm{cond}_F(A) \leq n \cdot \mathrm{cond}_\infty(A)$ für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar.

(iii) $\mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(A)$ für alle unitären Matrizen U und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar.

Aufgabe 9.2 (Votieraufgabe)

Beweisen Sie bitte Satz 2.25 aus der Vorlesung:
Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $A^+ \in \mathbb{C}^{n\times m}$ die Moore-Penrose Inverse.

(a) $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$.

(b) A^+ erfüllt die Moore-Penrose Axionme

$$AA^+A = A, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad A^+AA^+ = A, \quad (A^+A)^* = A^+A.$$

(c) A^+ besitzt die Singulärwertzerlegung

$$A^+u_j = \sigma_j^{-1}v_j, \quad (A^+)^*v_j = \sigma_j^{-1}u_j.$$

Aufgabe 9.3 (Votieraufgabe)

Betrachten Sie das lineare Ausgleichsproblem

$$\text{minimiere } \|Ax - b\|_2 \tag{1}$$

mit einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{C}^m$. Für ein $\rho_k > 0$ sei x^k Lösung der regularisierten Normalengleichung

$$(A^*A + \rho_k I)x = A^*b.$$

Zeigen Sie, dass für eine Folge $\{\rho_k\}$ mit $\rho_k \to 0$ die hierdurch erzeugte Folge $\{x_k\}$ gegen eine Lösung $\hat{x}$ von (1) konvergiert, und dass diese Lösung der Ungleichung

$$\|\hat{x}\|_2 \leq \|x\|_2$$

für alle Lösungen x von (1) genügt, das heißt, der Grenzwert $\hat{x}$ ist diejenige Lösung von (1) mit kleinster euklidischer Norm.

Aufgabe 9.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]

Schreiben Sie eine `SCILAB`-Funktion

```
[Aplus] = Moore_Penrose(A),
```

welche zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Moore-Penrose Inverse A^+ bestimmt. Dazu darf der `SCILAB`-Befehl `spec` verwendet werden, der `SCILAB`-Befehl `svd` soll **nicht** verwendet werden. Testen Sie ihre Funktion für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie ihr Ergebnis.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass zur Bestimmung der Moore-Penrose Inverse die Anteile von U aus $\mathcal{N}(A^*)$ nicht benötigt werden.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 15.12.2015 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll eine kommentierte Ausarbeitung in `SCILAB`-Code bis zum 15.12.2015 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Numerik9_1516_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik9_1516_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Ausarbeitung verlangt. Diese werden lediglich in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 9 werden in den Übungen zwischen dem 11.01.2016 und dem 15.01.2016 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**