

(erschienen am 15.12.2015)

Aufgabe 10.1 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Matrix mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$, und $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A . Wir zerlegen $Q = (Q_1, Q_2)$ mit $Q_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $Q_2 \in \mathbb{C}^{m \times (m-n)}$. Zeigen Sie:

- (a) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q_1)$.
- (b) Die Spalten von Q_1 bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{R}(A)$.
- (c) Die Spalten von Q_2 bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{N}(A^*)$.

Aufgabe 10.2 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Bestimmen Sie, mithilfe von Householder-Transformationen, die QR-Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.3 (Votieraufgabe)

Schreiben Sie einen Pseudocode, welcher die QR-Zerlegung einer injektiven Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ realisiert: dabei soll die Matrix R und eine weitere Matrix V ausgegeben werden, wobei V die notwendigen Informationen über Q enthält. Schreiben Sie damit einen weiteren Pseudocode, welcher mit Hilfe der Matrix V die Multiplikation Q^*x , für ein $x \in \mathbb{C}^n$, realisiert.

Aufgabe 10.4 (Rettet den Weihnachtsbaum - Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Schreiben Sie eine SCILAB-Funktion `QR_decomp(A)`, welche die QR-Zerlegung einer injektiven Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ realisiert.

Laden Sie sich nun das mat-file „Weihnachtsbaum.mat“ von der Veranstaltungshomepage herunter. Mit Hilfe des SCILAB-Befehls `loadmatfile` können Sie dieses in SCILAB extrahieren. Es enthält eine Matrix A und einen Vektor y . Betrachten Sie nun das folgende Problem:

Oh nein! Der Weihnachtsbaum wurde von der hinterlistigen Matrix A verwischt und ist nun im Vektor y gefangen. Aber bald ist Weihnachten! Können wir den Baum noch retten?

Retten Sie den Weihnachtsbaum! Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (i) Verwenden Sie ihre SCILAB-Funktion `QR_decomp` um das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_x \|Ax - y\|$$

zu lösen.

- (ii) Verwenden Sie die unten angegebene SCILAB-Funktion `Zeichne_Baum` um den Weihnachtsbaum in vollem Glanz erstrahlen zu lassen.
- (iii) Hätten Sie den Weihnachtsbaum auch mit Hilfe der Gaußschen Normalengleichung retten können?

```
function [Baum] = Zeichne_Baum(x)
// Visualisiert das Ergebnis x des linearen Ausgleichsproblems aus Aufgabe 10.4.
Baum = uint8(matrix(x,16,16,3))
Matplot(Baum)
endfunction
```

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 12.01.2016 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden.
- Zu **Programmieraufgaben*** soll eine kommentierte Ausarbeitung in SCILAB-Code bis zum 12.01.2016 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Numerik10_1516_Gruppennummer:**" (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik10_1516_3:" beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Ausarbeitung verlangt. Diese werden lediglich in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 10 werden in den Übungen zwischen dem 18.01.2016 und dem 22.01.2016 besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.