Matteo Costantini / Jürgen Wolfart

Hausaufgaben und Infos zur Linearen Algebra

Sommersemester 2016

0. (Keine Hausaufgabe, sondern eine ,,Saalübung" für die ersten Übungsstunden am 19. bzw. 20.4.) Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$, dass sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, und dass dieser Punkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt.

Die folgenden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Sie dürfen gerne mit anderen zusammenarbeiten, aber formulieren Sie Ihre Resultate dann alleine. Bitte schreiben Sie leserlich und sauber, versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors, heften Sie die Blätter zusammen und geben Sie **1** bis **4** am Donnerstag, den 21.4., vor der Vorlesung ab.

1. Für welche reellen Zahlen ρ können Sie mit der Cramer'schen Regel eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (3+\rho)x - y &= 2 \\ 9x - (3-\rho)y &= 6 \end{aligned}$$

finden? Berechnen Sie die Lösung in diesem Fall. Gibt es Lösungen, wenn die Cramer'sche Regel versagt? Wenn ja, welche?
Jede der beiden Gleichungen beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie diese beiden Geraden für die Werte $\rho = 0, 1, 2$.

2. Zeigen Sie, dass die Determinante $\det(a,b)$ zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ genau dann $= 0$ ist, wenn a und b Vielfache voneinander sind.
Genau dann ist Mathematikerjargon und bedeutet, dass Sie zwei Richtungen zeigen müssen:
1. Wenn $a = \lambda b$ (oder $b = \mu a$, mit λ bzw. $\mu \in \mathbb{R}$), gilt $\det(a,b) = 0$.
2. Wenn $\det(a,b) = 0$, sind a und b Vielfache voneinander.

3. Es sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: A ist injektiv ist genau dann, wenn A surjektiv ist. Zeigen Sie ferner: Wenn A nicht injektiv ist, aber nicht die Nullabbildung, dann sind der *Kern* und das *Bild* von A, also

$$\operatorname{Ker}(A) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{Im}(A) := \left\{ A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

Geraden durch $\binom{0}{0}$. Schon wieder Mathematikerjargon: A heißt *injektiv*, wenn für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$ aus $A(a) = A(b)$ auch $a = b$ folgt; und A heißt *surjektiv*, wenn $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{R}^2$ ist, wenn es also zu jedem $c \in \mathbb{R}^2$ ein $a \in \mathbb{R}^2$ gibt mit $A(a) = c$.

4. Fortsetzung von **3** : Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen sie $\mathrm{Ker}\,(A)$ und $\mathrm{Im}\,(A)$ und skizzieren Sie diese beiden (Geraden!). Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass

$$_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Es seien a und b Vektoren mit $\|a\| = \|b\|$. Zeigen Sie, dass $a - b \perp a + b$. Zeichnen Sie ein Bild hierzu. Welchen Satz der Elementargeometrie haben Sie hier bewiesen?

6. a) Die Verschiebung $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $a \mapsto V(a) := a + v$. Zeigen Sie, dass V eine Isometrie ist. Zeigen Sie, dass V nicht linear ist, wenn $v \neq (0, 0)$.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung an der Geraden $x = 2y$.

c) Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ beschreibt eine Spiegelung. Geben Sie die Spiegelungsgerade an!

7. Es sei abc ein gleichschenkenkliges Dreieck, d.h. $\|c-a\| = \|c-b\|$ für $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\angle(c - a, b - a) = \angle(a - b, c - b)$.

8. Beweisen Sie – ohne Ihren Taschenrechner zu Rate zu ziehen – die Formeln

$$\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(120°) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(225°) = 1.$$

5 bis **8** sind abzugeben am Donnerstag, 28.4., vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Laut Anmeldungen sind die Übungsgruppen sehr ungleich ausgelastet. In Ihrem eigenen Interesse sollten Sie eine Gruppe gehen, die weniger als 30 Teilnehmer hat, damit Sie zu Wort kommen, Fragen stellen und mit Tutor(in) kommunizieren können. Daher eine Bitte: Wenn es Ihnen möglich ist, wechseln Sie von den Gruppen
Dienstag 12–14 (Groh) bzw. Mittwoch 10–12 (Wagner) in eine der Gruppen
Dienstag 16–18 (Kumpitsch/Görür) oder Mittwoch 14–16 (Klein).
Wechselmodalitäten siehe homepage.

Musterlösung zu 3 (Kumpitsch):

Wie bereits die zweite Aufgabe, handelt es sich bei der ersten Behauptung um eine „genau dann, wenn"–Aussage. Wir zeigen also Hin- und Rückrichtung.

„$\Rightarrow$" Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv und $A = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^2$. Dann besitzt das Gleichungssystem $ax + by = 0$ nur die Lösung $x = y = 0$. Damit sind die Spaltenvektoren a und b keine Vielfache voneinander. Da die Abbildung insbesondere nicht die Nullabbildung ist, folgt mit der Aufgabe 2, dass $\det(A) \neq 0$. Mit der Cramerschen Regel folgt, dass das Gleichungssystem $ax + by = c$ mit $c \in \mathbb{R}^2$ eindeutig lösbar ist. Damit gibt es also zu jedem $c \in \mathbb{R}^2$ ein $v = \binom{x}{y}$ mit $A(v) = c$. Das war für die Surjektivität zu zeigen.

„$\Leftarrow$" Für die Rückrichtung führen wir einen Beweis per Kontraposition. Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ also nicht injektiv. Dann existiert ein Element $c \in \mathbb{R}^2$ mit mehr als einem Urbild, das heißt insbesondere, dass $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$ mehr als eine Lösung besitzt, etwa $u \neq v \in \mathbb{R}^2$. Also ist $A(u - v) = 0$, und genau wie oben müssen die Spaltenvektoren a und b von A Vielfache voneinander sein, das heißt es gibt ein $r \in \mathbb{R}$ mit $b = ra$. Dann folgt insbesondere, dass im Bild von A nur Vielfache von a sind. Es folgt also ferner $\mathrm{Bild}(A) \neq \mathbb{R}^2$ und somit ist A nicht surjektiv. Damit folgt die erste Behauptung.

Für die zweite Behauptung ist nur eine Implikation zu zeigen. Gegeben eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die nicht injektiv und nicht die Nullabbildung ist. Wir wollen zeigen, dass der $\mathrm{Ker}(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$ Urspungsgeraden (= Geraden mit Stützvektor 0) sind. Für $\mathrm{Bild}(A)$ ist nicht mehr viel zu tun. Im Beweis der ersten Behauptung wurde bereits gezeigt, dass aus der Eigenschaft, nicht injektiv zu sein, bereits folgt, dass $\mathrm{Bild}(A) = \{ra : r \in \mathbb{R}\}$ ist. Damit ist das Bild von A eine Ursprungsgerade. Ist A nicht injektiv, bedeutet das ferner, dass es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ gibt, der nicht der Nullvektor ist und auf die Null abgebildet wird und somit das homogene lineare Gleichungssystem $Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ löst. Dann lösen aber auch alle Vielfachen von v dieses Gleichungssystem. Weitere Lösungen kann es nicht geben, sonst wäre A die Nullabbildung. Es können also alle Elemente im Kern durch λv mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden. Der Kern von A ist somit auch eine Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^2$.

9. Sei $l : \{b + ta\colon t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass l gegeben wird durch das Gleichungssystem $a \times x = a \times b$. Sei $b = (0,0,0), a = (2,3,1) \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Projektion von $c = (0,1,1)$ auf l.

10. Es seien a, b, c drei verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^3$, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie dass die Vektoren $b-a$ und $c-a$ linear unabhängig sind, dass es also eine eindeutig bestimmte Ebene E mit $a, b, c \in E$ gibt.

11. Sei $a, b \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie den *Cosinussatz*:

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos(\angle(a, b)).$$

Zeigen Sie außerdem die *Dreiecksungleichung*: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.
Interpretieren Sie diese geometrisch. Wann tritt Gleichheit auf?

12. Für welche reellen Zahlenpaare (λ, ρ) hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 + \lambda \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= -7 \\ x_1 - 3x_2 + \rho x_3 &= -2 \end{aligned}$$

keine Lösung, unendlich viele Lösungen, eine eindeutig bestimmte Lösung?

9 bis **12** sind abzugeben am **Mittwoch, 4.5. (Ausnahmetermin wegen Feiertag am 5.5.)** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Nutzen Sie die Möglichkeiten, im Austausch mit anderen mathematische Lösungsideen zu entwickeln: Übungsstunde, Lernzentrum, Gründung einer Lerngruppe. Wenn man anderen etwas erklärt, wird's einem selbst häufig klarer als vorher. Formulieren Sie Ihre Lösungen aber selbständig; den richtigen Mathe–Jargon lernt man nur durch Versuch und Irrtum, nicht durch Zusehen und Abschreiben!

Musterlösung zu 6 (Benjes):

a) Zeigen Sie, dass V eine Isometrie ist. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Isometrie, wenn $\forall a, b \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\|A(a) - A(b)\| = \|a - b\|$. Für diese Abbildung gilt: $\|V(a) - V(b)\| = \|a + v - b - v\| = \|a - b\|$. Somit ist V eine Isometrie.
Zeigen Sie, dass V nicht linear ist, wenn $v \neq \binom{0}{0}$. Eine Abbildung f heißt linear wenn gilt: $f(x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot f(a) + y \cdot f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Jedoch: $V(x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot a + y \cdot b + v \neq x \cdot (a + v) + y \cdot (b + v) = x \cdot V(a) + y \cdot V(b)$, wenn $v \neq 0$.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung an der Gerade $x = 2y$.
Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Soll A an der Gerade $x = 2y$ spiegeln, so muss $\forall y \in \mathbb{R}$ gelten: $A \cdot \binom{2y}{y} = \binom{2y}{y}$. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem: $b = 2 - 2a$ und $d = 1 - 2c$. Um dieses zu lösen, sucht man sich noch zwei Punkte, die aufeinander gespiegelt werden: z.B. $\binom{-1}{2}$ (steht im Nullpunkt senkrecht auf dem Richtungsvektor $\binom{2}{1}$ der Geraden) auf $\binom{1}{-2}$. Damit ergibt sich $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

c) Offensichtlich ist dies die Spiegelung aus Aufgabenteil b. Damit ist die Spiegelungsgerade $x = 2y$.

13. Es seien $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$. Erklären Sie, warum die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Geraden durch a und b beschreibt.

14. Zeigen Sie: Der Abstand eines Punktes $p \in \mathbb{R}^3$ zu einer Geraden $l = \{b + t \cdot a \ : \ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ ist

$$\frac{1}{\|a\|} \cdot \|(p - b) \times a\| \; .$$

15. Bestimmen Sie den Schnitt $l = E \cap F$ der Ebenen

$$E: \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{und} \quad F: \ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$$

und den Schnitt $p = G \cap s$ von

$$G: \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \quad \text{und} \quad s = (2, 1, 2) + \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1) \; .$$

Berechnen Sie den Abstand von l und p.

16. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$a = (3, -1, 2), \quad b = (5, 2, 4), \quad c = (-3, 7, 1) .$$

Berechnen Sie ferner das Volumen des von a, b, c aufgespannten Parallelotops.

13 bis **16** sind abzugeben am **Donnerstag, 12.5.** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Wichtige Kommandos: Schreiben Sie Ihre Hausaufgaben sauber und leserlich auf! Und bitte nicht einfach eine wortlose Abfolge von Formelzeilen: Versuchen Sie, Ihre Argumente durch einen sinnvollen Text in Worte zu fassen.

Bei Abgabe offensichtlich identischer Hausaufgaben wird Ihnen nur die Hälfte der erreichten Punkte gutgeschrieben.

Musterlösung zu 11 (Görür):

Seien $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$. Zum *Cosinussatz*:

$$\begin{aligned}\|a-b\|^2 = \langle a-b, a-b\rangle \ &= \ (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle \ = \ \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos(\angle(a,b))\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Formel $\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\|\cos(\angle(a,b))$, die aus der Vorlesung bekannt ist. Zur *Dreiecksungleichung*: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}0 &\le \langle a-\lambda b, a-\lambda b\rangle \ = \ \langle a-\lambda b, a\rangle + \langle a-\lambda b, -\lambda b\rangle \ = \ \langle a-\lambda b, a\rangle - \lambda\langle a-\lambda b, b\rangle \\ &= \langle a, a\rangle + \langle -\lambda b, a\rangle - \lambda\langle a, b\rangle - \lambda\langle -\lambda b, b\rangle \ = \ \langle a, a\rangle - 2\lambda\langle a, b\rangle + \lambda^2\langle b, b\rangle .\end{aligned}$$

Speziell für $\lambda = \langle a, b\rangle\|b\|^{-2}$ folgt daraus

$$0 \le \|a\|^2 - 2\langle a, b\rangle^2\|b\|^{-2} + \langle a, b\rangle^2\|b\|^{-2} \ = \ \|a\|^2 - \langle a, b\rangle^2\|b\|^{-2} .$$

Dann gilt $\langle a, b\rangle^2 \le \|a\|^2\|b\|^2$, also auch $\langle a, b\rangle \le \|a\|\|b\|$. Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle \ &= \ (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + (a_3+b_3)^2 \\ &= \ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 \ = \ \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle \\ &\le \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\| \ = \ (\|a\| + \|b\|)^2\end{aligned}$$

Demnach folgt $\|a+b\| \le \|a\| + \|b\|$.

Geometrische Interpretation: Eine Dreiecksseite ist höchstens so lang wie die Summe der beiden anderen Seitenlängen.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\|$, also wenn $\angle(a, b) = 0$ bzw. wenn zwei Seiten Teile der dritten Seite sind, also das Dreieck entartet ist. Genauer gilt im Falle $a = \lambda b,\ \lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \geq 0$

$$\langle \lambda b, b\rangle \ = \ \lambda\langle b, b\rangle \ = \ \lambda\|b\|^2 \ = \ \|\lambda b\|\|b\| \ .$$

17. Zeigen Sie, dass es für eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $A \neq 0$ Basen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ gibt, sodass ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$ eine der nachfolgenden Formen hat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Es sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ und α ein Winkel. Zeigen Sie, dass die Abbildung $R(v, \alpha)$

$$R(v, \alpha)(x) = (1 - \cos(\alpha)) \cdot \langle v, x\rangle \cdot v + \cos(\alpha) \cdot x + \sin(\alpha) \cdot v \times x$$

eine Drehung mit Drehachse $\mathbb{R}v$ und Drehwinkel α ist.
Geben Sie außerdem die Matrix der Drehung mit Achse $\mathbb{R}(1, 2, 2)$ und Drehwinkel $60°$ an.

19. Es sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2}\colon a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Körper ist.

20. Sei K ein Körper, $a, b, x, y \in K$. Beweisen Sie:
a) Aus $a + x = a$ folgt $x = 0$.
b) Wenn $a \neq 0$, $ax = b$ und $ay = b$, dann ist $x = y$ (*Kürzungsregel*).
c) Wenn K nur endlich viele Elemente besitzt, dann gibt es eine endliche (und nichtleere) Summe $1 + 1 + \ldots + 1 = 0$.
d) Fortsetzung von c): Die kleinste Anzahl der Glieder einer solchen Summe von Einsen ist eine Primzahl. (Die nennt man dann die *Charakteristik* des Körpers.) Sie dürfen verwenden, dass ein Körper stets *nullteilerfrei* ist; das ist eine Kurzform der Aussage: Aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

17 bis **20** sind abzugeben am **Donnerstag, 19.5.** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Am Mittwoch, 18.5., ist ebenfalls Vorlesung.

Musterlösung zu 13 :

Die Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile ergibt die Gleichung

$$(a_2 - b_2)x_1 \;-\; (a_1 - b_1)x_2 \;+\; a_1b_2 - b_1a_2 \;=\; 0 \,.$$

Es handelt sich wirklich um eine Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$, denn $a \neq b$ und somit verschwinden nicht beide Koeffizienten von x_1 und x_2. Bleibt nur die Frage, warum die Gerade die Punkte a und b enthält. Man könnte hier einfach die Koordinaten in die Gleichung einsetzen und nachrechnen, dass die Gleichung dann erfüllt ist. Schneller geht's mit einem Blick auf die Determinante in der Aufgabe: Setzt man (a_1, a_2) bzw. (b_1, b_2) für (x_1, x_2) ein, so hat die Determinante zwei gleiche Zeilen und muss darum $= 0$ sein.

21. Beweisen Sie den *Satz vom Fußball:* Wenn in einem Fußballspiel nur ein Ball verwendet wird, gibt es auf ihm zwei Punkte, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf dem Anstoßpunkt liegt) an der gleichen Position im umgebenden Raum befinden.

22. Sei ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gegeben.
a) Berechnen Sie $|z+1|^2 + |z-1|^2$.
b) Sei nun außerdem $z \neq \pm 1$. Zeigen Sie, dass 0 , $z+1$ und $z-1$ in der Gaußschen Zahlenebene die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreicks sind.

23. Berechnen Sie

$$(3i)^{53} \qquad \left(\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right)^{12} \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^{16} \qquad (1-i)^{1000} \quad .$$

24. Beweisen Sie: Die Ungleichungen

$$\left|\frac{z-2i}{z-3}\right| \;<\; 1 \qquad \text{bzw.} \qquad |z-2+i| \;<\; 3$$

beschreiben eine Halbebene bzw. eine Kreisscheibe in der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$.

21 bis **24** sind abzugeben am **Mittwoch, 25.5. (Ausnahmetermin wegen Feiertag am 26.5.)** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Musterlösung zu 20 (Benjes)

Sei K ein Körper, $a, b, x, y \in K$.

a) $a + x = a \;\Leftrightarrow\; a + x - a = a - a \;\Leftrightarrow\; a - a + x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (folgt alles schon aus den Additionsaxiomen)

b) Sei $a \neq 0, ax = b$ und $ay = b$. Setze $ax = ay$ und forme um zu $ax - ay = a(x - y) = 0$. Aus $a \neq 0$ folgt $x - y = 0$ und somit $x = y$ (Nullteilerfreiheit).

c) Da K nur endlich viele Elemente hat, gibt es verschieden lange Summen $1 + 1 + ... + 1 = \sum_{k=1}^{n} 1$ und $1 + 1 + ... + 1 = \sum_{k=1}^{m} 1$ für zwei $n < m \in \mathbb{N}$, die aber das gleiche Element $a \in K$ ergeben. Aus Teil a) folgt somit $x = \sum_{k=1}^{m-n} 1 = 0$.

d) Angenommen, die Charakteristik p wäre keine Primzahl. Dann gibt es mindestens eine Zerlegung $p = ds$ mit $d, s \in \mathbb{N}$, $1 < d, s < p$, so dass nach dem Distributivgesetz

$$0 \;=\; \sum_{k=1}^{p} 1 \;=\; (\sum_{k=1}^{d} 1)(\sum_{k=1}^{s} 1)$$

wäre, aber (p war minimal gewählt!) $\sum_{k=1}^{d} 1 \neq 0$ und $\sum_{k=1}^{s} 1 \neq 0$ im Widerspruch zur Nullteilerfreiheit von K.

25. Sei V ein $\mathbb{C}$–Vektorraum der Dimension m. Zeigen Sie, dass V auch ein $\mathbb{R}$–Vektorraum ist, als $\mathbb{R}$–Vektorraum allerdings von Dimension $2m$.

26. Sei V ein Vektorraum und seien U, W Unterräume. Zeigen Sie, dass $U \cap W$ ein Unterraum ist, jedoch $U \cup W$ im Allgemeinen nicht. Sei ferner

$$U + W := \{u + w \colon u \in U, w \in W\}$$

die *Summe* von U and W. Zeigen Sie, dass $U + W$ ein Unterraum von V ist mit

$$\dim(U + W) \;+\; \dim(U \cap W) \;=\; \dim(U) \;+\; \dim(W)\;.$$

27. Bestimmen Sie für alle Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 3 + ax_2 \\ x_1 + 1 &= x_2 + 2x_3 + ax_4 \\ ax_1 + 3 &= x_2 + x_4 \\ x_1 + a^2 x_2 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

28. Berechnen Sie die Dimension der folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$\langle\, (1, -1, 4, 5)\;,\; (2, 2, -1, 3)\;,\; (3, 1, 2, 8)\;,\; (-1, 3, 1, 5)\,\rangle\;,$$

$$\langle\, (2, 0, 2, 10)\;,\; (0, 2, -1, 3)\;,\; (1, 0, 1, 5)\;,\; (0, 4, -2, 6)\,\rangle\;.$$

25 bis **28** sind abzugeben am **Donnerstag, 2.6.** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Musterlösung zu 21 (Mrozik):

Um die Lage des Fußballs auf dem Anstoßpunkt zu beschreiben, modellieren wir den Ball als Oberfläche einer Kugel mit Radius 1, deren Zentrum im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt. Wir bezeichnen die Kugeloberfläche mit $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Wird der Ball zu Beginn der zweiten Halbzeit auf den Anstoßpunkt zurückgelegt, wird seine neue Position durch eine Abbildung $A : S^2 \to S^2$ beschrieben. Diese Abbildung lässt sich zu einer Abbildung $A' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fortsetzen, indem man setzt

$$A'(x) \ := \begin{cases} \|x\| \, A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dies ist eine orthogonale Transformation, denn es ist $A'(0) = 0$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\|A'(x-y)\| = \left\| \|x-y\| \, A\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) \right\| = \|x-y\| \left\| A\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) \right\| = \|x-y\| \, .$$

Nach Satz 2.11 2) existiert eine Basis $\mathcal{B}$, bezüglich der A' die Matrixdarstellung

$$_{\mathcal{B}}A'_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

besitzt. Da aus physikalischen Gründen keine Drehspiegelung des Fußballs möglich ist, muss der Eintrag oben links $+1$ lauten; die Matrix beschreibt also eine Drehung um eine feste Achse. Dabei werden die zwei Punkte, in denen die Achse die Kugeloberfläche durchstößt, auf sich selbst abgebildet.

29. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *hermitesch*, wenn $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ für alle i und j, kurz $A = \overline{A}^T =: A^*$. (Erinnerung: $\overline{a}$ ist die zu $a \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl.)

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{C}^{n \times n}, \quad A \mapsto A^*$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$–Vektorräumen ist.

b) Zeigen Sie, dass der Raum der hermiteschen Matrizen kein Unterraum des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass der Raum U der hermiteschen Matrizen ein (reeller) Unterraum des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist (vgl. Aufg. **25**). Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.

30. K sei ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times k}$ Matrizen, welche lineare Abbildungen

$$K^k \to K^n : y \mapsto By \qquad \text{und} \qquad K^n \to K^m : x \mapsto Ax$$

definieren. Beweisen Sie:
a) Die Dimension des Bildes der Abbildung $x \mapsto Ax$ ist gleich dem Rang der Matrix A.
b) Der Rang des Matrixprodukts AB ist $\leq \mathrm{Rang}\,(A)$ und $\leq \mathrm{Rang}\,(B)$.

31. Sei $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ gegeben durch die Matrix

$${}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ 1+i & 1 & 1+2i \\ 1-i & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{C})$$

in der Standardbasis. Bestimmen Sie:
a) den Rang von A,
b) eine Basis von $\mathrm{Im}\,(A)$, bestehend aus Spaltenvektoren von A,
c) eine Basis von $\mathrm{Ker}\,(A)$.

32. Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix ${}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis.
Sei $b_1 = (1,1,0), b_2 = (2,-1,3), b_3 = (2,0,3)$ und $c_1 = (2,3), c_2 = (-1,3)$.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{C}}$. Tipp: Schreiben Sie die b_i und die c_j lieber als Spaltenvektoren.

29 bis **32** sind abzugeben am **Donnerstag, 9.6.** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Klar: Abgabe der Aufgaben nach Veröffentlichung der Musterlösung im Netz ist zu spät!

Klausur-Informationen

Zeit und Ort: Die Klausur wird geschrieben am **Montag, 18. Juli 2016, von 10.15 bis 11.45 Uhr im Hörsaal V**, die Nachklausur dann am **Montag, 10. Oktober, von 10.15 bis 11.45 Uhr** (den Hörsaal für die Nachklausur werden wir noch auf der Homepage bekanntgeben).

Zulassung: Sie sind zur Klausur zugelassen, wenn Sie im Semester mindestens 70 Hausaufgabenpunkte erreicht haben oder die Klausurzulassung einer LinAlg–Vorlesung in einem der letzten Semester erreicht haben. Für die Nachklausur gelten die gleichen Bedingungen.

Sie dürfen die Nachklausur als Erstversuch nutzen, ich werde allerdings keine Nach–Nach–Klausur schreiben.

Ich hoffe, die Ergebnisse der Korrektur am Abend des Donnerstag, 21.7., bekanntgeben zu können (Zimmertür Raum 205 der Robert–Mayer–Str. 6–8 und Homepage, natürlich anonymisiert per Matrikelnummern). Klausureinsicht gibt es nur am Montag, 25.7., von 14 bis 16 Uhr im Raum 217 der Robert–Mayer–Str. 6–8. L3–Leute: Dort kann ich auch Modulzettel unterschreiben und stempeln; Vordrucke mitbringen!

Sitzordnung und Spielregeln: (Gelten entsprechend auch für die Nachklausur) Jede zweite Reihe bleibt frei, zwischen Ihnen und Ihren nächsten Nachbarn sind möglichst drei, mindestens aber zwei Plätze frei zu halten.

Verboten ist die Verwendung von Mobiltelefonen, Taschenrechnern, Laptops, Büchern und Skripten. Am besten gar nicht erst mitbringen! Wenn Sie den Tag nicht ohne Ihr Smartphone verbringen können, dann dieses ausschalten und tief in eine verschlossene Tasche versenken. Jeder Betrugsversuch hat Ausschluss aus der Klausur und Note 6 zur Folge. Jeder Teilnehmer muss bis zum Ende der Klausur auf seinem Platz bleiben, die Klausur wird um 11.45 Uhr am Platz eingesammelt. Toilettenbesuch nur einzeln und unter Zurücklassung allen Materials.

Erlaubt ist ein eigenhändig handschriftlich hergestellter DIN A4 –Spickzettel, beidseitig beschrieben (keine Kopie!).

Mitzubringen sind mindestens zwei funktionsfähige Stifte als Schreibzeug sowie ausreichend Papier, ebenso Personalausweis und/oder Goethecard. Diese sichtbar auf den Tisch legen!

Klausurstil und Bewertung: Die Klausur wird aus fünf oder sechs Aufgaben bestehen, insgesamt bringen sie bei komplett richtiger Lösung 100 Klausurpunkte. In den ersten beiden (Rechen–)Aufgaben sind nur die Ergebnisse anzugeben, und nur diese zählen, Rechenweg egal. Also einfach Resultat auf das Blatt eintragen, fertig. Aufgabe **3** ist eine *multiple–choice*–Aufgabe, in der Sie für neun Behauptungen entscheiden müssen, ob diese richtig oder falsch sind. Die letzten zwei oder drei Aufgaben erfordern eine kurze Begründung; diese auf ein Extrablatt schreiben; auf alle Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnr., bitte leserlich!!

Damit Sie sehen, wie so eine Klausur aussehen kann, werden die nächsten Hausaufgaben (**33 − 38**) im Klausur–Stil abgefasst („*Probeklausur*”).

Noten bzw. Notenpunkte in Linearer Algebra sind für Mathe–Bachelor– oder L3–Studierende nicht wichtig – oder allenfalls, wenn ein Wechsel des Studienorts ansteht. Sie werden trotzdem an alle vergeben, damit Sie eine Selbstkontrolle über den Stand Ihres Wissens und Könnens haben. Bestanden ist die Klausur mit 46 Klausurpunkten (= 5 Notenpunkte, Note 4), von da an geht's linear aufwärts bis zu 100 Klausurpunkten (= 15 Notenpunkte, Note 1) bzw. linear abwärts bis zu 0 Notenpunkten.

Studierende für L3 oder Mathe–Bachelor dürfen die Klausur beliebig oft wiederholen (vorausgesetzt, sie sind zugelassen).

Musterlösung zu 26 (Görür)

Sei V ein Vektorraum und seien U, W Unterräume.
Zu zeigen ist, dass $U \cap W$ ein Unterraum ist, jedoch $U \cup W$ im Allgemeinen nicht. Sei ferner

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

die Summe von U und W. Zu zeigen ist außerdem, dass $U + W$ ein Unterraum von V ist mit

$$dim(U + W) + dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W).$$

Sei V ein Vektorraum (bzw. genauer ein K-Vektorraum). Folgende Punkte müssen gelten, damit $U \cap W$ ein Unterraum ist:

1. $0 \in U \cap W$
2. $u + w \in U \cap W$ für alle $u, w \in U \cap W$
3. $\lambda u \in U \cap W$ für alle $\lambda \in K, u \in U \cap W$.

Zu den Unterpunkten:

1. Da U und W Unterräume sind, folgt dass $0 \in U$ und $0 \in W$. Hieraus folgt dann wiederum $0 \in U \cap W$.
2. Seien $u, w \in U \cap W$, dann sind $u, w \in U$ und $u, w \in W$. Da U und W Unterräume sind, folgt dass $u + w \in U$ und $u + w \in W$, also $u + w \in U \cap W$.
3. Sei $\lambda \in K, u \in U \cap W$, also $u \in U$ und $u \in W$. Da U und W Unterräume sind, folgt dass $\lambda u \in U$ und $\lambda u \in W$, also $\lambda u \in U \cap W$.

Da alle Punkte 1), 2), 3) erfüllt sind, folgt dass $U \cap W$ ein Unterraum ist.

Um zu zeigen, dass $U \cup W$ im Allgemeinen kein Unterraum ist, zeigen wir, dass $U \cup W$ bezüglich der Addition nicht abgeschlossen ist. Seien also $u, w \in U \cup W$, wobei gelte, dass $u \notin W$ und $w \notin U$. Hieraus folgt, dass im Allgemeinen $u + w \notin W$ und $u + w \notin U$, also im Allgemeinen $u + w \notin U \cup W$. Also ist $U \cup W$ im Allgemeinen kein Unterraum.
Für ein konkretes Gegenbeispiel schauen wir uns den $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum und die Unterräume $U = \{a * (1, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ (x-Achse) und $W = \{b * (0, 1) \mid b \in \mathbb{R}\}$ (y-Achse) an. Wir betrachten $u = (1, 0) \in U$ und $w = (0, 1) \in W$, dann gilt $u + w = (1, 1) \notin U \cup W$.

Nun zeigen wir, dass $U + W$ ein Unterraum ist:

1. Da U und W Unterräume sind, gilt $0 \in U$ und $0 \in W$. Addieren wir diese beiden Elemente, folgt $0 + 0 = 0 \in U + W$.

2. Seien $u + w$ und $\overline{u} + \overline{w} \in U + W$ mit $u, \overline{u} \in U$ und $w, \overline{w} \in W$. Dann gilt $(u + w) + (\overline{u} + \overline{w}) \overset{(*_1)}{=} (u + \overline{u}) + (w + \overline{w})$, mit $u + \overline{u} \in U$, da U ein Unterrraum und $w + \overline{w} \in W$, da W ein Unterraum. Es folgt also, dass $(u + w) + (\overline{u} + \overline{w}) \in U + W$.

3. Seien $\lambda \in K$ und $u+w \in U+W$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Es gilt $\lambda(u+w) \overset{(*_2)}{=} \lambda u+\lambda w$, wobei $\lambda u \in U$ und $\lambda w \in W$ sind, weil U und W Unterräume sind. Es gilt also $\lambda(u + w) \in U + W$.

$(*_1)$ und $(*_2)$ Folgen aus den Vektorraumaxiomen. Es folgt insgesamt, dass $U + W$ ein Unterraum ist.

Nun zur Dimensionsformel für Unterräume: Wir wollen zeigen, dass

$$\begin{aligned} dim(U + W) + dim(U \cap W) &= dim(U) + dim(W) \\ \Leftrightarrow dim(U + W) &= dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) \end{aligned}$$

gilt.
Wir wissen, dass $U \cap W$ ein Unterraum ist, d.h. es existiert eine Basis $(b_1, ..., b_n)$ von $U \cap W$ mit $dim(U \cap W) = n$. Da $U \cap W \subseteq U$ und $U \cap W \subseteq W$, kann man das linear unabhängige System $b_1, ..., b_n$ zu einer Basis von W bzw. U ergänzen. Sei also $(b_1, ..., b_n, u_1, ..., u_{m-n})$ eine Basis von U und $(b_1, ..., b_n, w_1, ..., w_{r-n})$ eine Basis von W, also $dim(U) = m$ und $dim(W) = r$.

Wir wollen zeigen, dass $C = (b_1, ..., b_n, u_1, ..., u_{m-n}, w_1..., w_{r-n})$ eine Basis von dem Unterraum $U + W$ ist, weil dann gelten würde

$$dim(U + W) = n + (m - n) + (r - n) = m + r - n = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Zuerst einmal zeigen wir, dass C den Unterraum $U + W$ erzeugt, also dass $\langle C\rangle = U + W$. Dass $\langle C\rangle \subset U + W$ gilt, ist klar, da b_i, u_i, w_i für alle i im Unterraum $U + W$ enthalten sind. Schauen wir uns also $U + W \subset \langle C\rangle$ an: Seien $u + w \in U + W$ mit $u \in U$ und $w \in W$ und $x_i, y_i, z_i, \overline{x}_i, x'_i \in K$ für alle i, dann gilt

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^{n} x_i b_i + \sum_{i=0}^{m-n} y_i u_i \text{ und} \\ w &= \sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i b_i + \sum_{i=0}^{r-n} z_i w_i, \end{aligned}$$

also $u+w = \sum_{i=0}^{n} x'_i b_i + \sum_{i=0}^{m-n} y_i u_i + \sum_{i=0}^{r-n} z_i w_i$ mit $x'_i = x_i + \overline{x}_i$. Also folgt $u+w \in U+W$.

Noch zu zeigen ist, dass C linear unabhängig ist. Wir betrachten
$x_1 b_1 + ... + x_n b_n + y_1 u_1 + ... + y_{m-n} u_{m-n} + z_1 w_1 + ... + z_{r-n} w_{r-n} = 0$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r-n} z_i w_i = - \sum_{i=1}^{n} x_i b_i - \sum_{i=1}^{m-n} y_i u_i \in U$, weil $b_1, ..., b_n, u_1, ..., u_{m-n}$ den Unterraum U

erzeugen. Es gilt, aber auch $\sum_{i=1}^{r-n} z_i w_i \in W$, woraus folgt, dass $\sum_{i=1}^{r-n} z_i w_i \in U \cap W$. Da $b_1, ..., b_n$ ein Erzeugendensystem von $U \cap W$ sind, können wir schreiben:

$$\sum_{i=1}^{r-n} z_i w_i = \sum_{j=1}^{n} g_j b_j \text{ mit } g_j \in K \text{ für } j = 1, ..., n$$

$(b_1, ..., b_n, w_1, ..., w_{r-n})$ ist aber eine Basis von W und somit sind $b_1, ..., b_n, ..., w_1, ..., w_{r-n}$ linear unabhängig, woraus folgt, dass $z_i = 0$ und $g_j = 0$ für $i = 1, ..., r-n$ und $j = 1, ..., n$. Hieraus folgt wiederum

$$\sum_{i=1}^{n} x_i b_i + \sum_{i=1}^{m-n} y_i u_i = 0$$

und da wir wissen, dass $(b_1, ..., b_n, u_1, ..., u_{m-n})$ eine Basis ist, folgt dass $x_i = 0$ und $y_i = 0$ für alle i und somit die lineare Unabhängigkeit von C. Aus der linearen Unabhängigkeit und aus $\langle C \rangle = U + W$ folgt, dass C eine Basis von $U + W$ ist und damit die Dimensionsformel.

Probeklausur

In den Aufgaben **33** und **34** zählt nur das Ergebnis; es genügt also, das Resultat anzugeben. Alle Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet, wie gewohnt.

33. a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Berechnen Sie $A^{-1} =$

b) Geben Sie A^{-1} an, wenn diesmal das gleiche A als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{F}_2$ zu lesen ist.

34. Schreiben Sie die folgenden beiden invertierbaren reellen Matrizen als Produkte von Elementarmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

35. Von den folgenden 9 Aussagen sind genau 5 richtig und 4 falsch. Kreuzen Sie die fünf richtigen an, nicht mehr und nicht weniger. Bei 5 Treffern gibt es 4 Punkte, bei 4 Treffern 2 Punkte, und bei 3 Richtigen einen Punkt. Begründungen sind nicht nötig und werden auch nicht gewertet.

☐ Der Vektor $(-1, 5) \in \mathbb{R}^2$ steht senkrecht auf der Geraden $-x + 5y = 3$

☐ $\langle a + b, a \times b \rangle = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$

☐ In jedem Körper ist $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \neq 0$

☐ $|z - 4| > 2$ beschreibt das Komplement einer Kreisscheibe in $\mathbb{C}$

☐ $A \in K^{3\times 4}$ ist invertierbar, wenn $\mathrm{Rang}(A) \geq 2$

☐ $\mathbb{F}_3^3$ hat genau drei eindimensionale Unterräume

☐ $(1, 0), (1, 1)$ und $(0, 1) \in \mathbb{C}^2$ sind linear unabhängig

☐ Wenn $K^n = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, sind $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig

☐ Linear unabhängige $a_1, \ldots, a_k \in K^m$ lassen sich immer zu einer Basis des K^m ergänzen

36. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$, in der ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = B$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

37. V sei ein K–Vektorraum der Dimension 4, U und W zwei Unterräume von V der Dimension 3. Beweisen Sie: $\dim(U \cap W) \geq 2$.

38. V sei ein K–Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie: Genau dann, wenn n gerade ist, gibt es Endomorphismen $A : V \to V$ mit $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Kern}(A)$. Geben Sie ein Beispiel in Form einer Matrix!

33 bis **38** sind abzugeben am **Donnerstag, 16.6.** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Musterlösung zu 29 (Theresa Kumpitsch)

(a) Da Transponieren und komplexe Konjugation wohldefiniert sind, ist diese Abbildung wohldefiniert. Um zu überprüfen, dass es sich um eine lineare Abbildung handelt, zeigen wir, dass für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$
2. $(rA)^* = rA^*$

Zu 1.: Seien $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$.

$$\begin{aligned}(A+B)^* &= \left(\left(\overline{a_{ij}+b_{ij}}\right)_{i,j}\right)^T = \left(\left(\overline{a_{ij}}+\overline{b_{ij}}\right)_{i,j}\right)^T \\ &= \left(\overline{a_{ji}}+\overline{b_{ji}}\right)_{i,j} = \left(\overline{a_{ji}}\right)_{i,j} + \left(\overline{b_{ji}}\right)_{i,j} = A^* + B^*.\end{aligned}$$

Zu 2. : Sei $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(A)^* &= \left(\left(\overline{ra_{ij}}\right)_{i,j}\right)^T = \left(\left(r\overline{a_{ij}}\right)_{i,j}\right)^T \\ &= \left(r\overline{a_{ji}}\right)_{i,j} = r\left(\overline{a_{ji}}\right)_{i,j} = rA^*.\end{aligned}$$

Damit handelt es sich um eine lineare Abbildung. Es bleibt zu zeigen, dass es sich um einen Isomorphismus handelt. Für die Existenz der Umkehrabbildung reicht es jedoch bereits einzusehen, dass die Abbildung selbstinvers ist. Dazu genügt die folgende Rechnung

$$(A^*)^* = \left(\left(\overline{a_{j,i}}\right)_{i,j}\right)^* = \left(\left(a_{ji}\right)_{i,j}\right)^T = (a_{ij})_{i,j} = A.$$

(b) Es reicht hier schon, sich für $n = 2$ ein Gegenbeispiel zu überlegen. Offensichtlich ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hermitesch. Jedoch gilt

$$iA = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = (iA)^*$$

und damit können die hermiteschen Matrizen keinen Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n\times n}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum bilden.

(c) Wir betrachten $U = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^* = A\}$ und fassen $\mathbb{C}^{n\times n}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Um nachzuprüfen, dass es sich um einen Untervektorraum handelt, könnte man die entsprechenden Axiome nachrechnen. Weil wir in (a) schon gezeigt haben, dass für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $r \in \mathbb{R}$ $(A+B)^* = A^*+B^*$ und $(rA)^* = rA^*$ gilt und die Nullmatrix offensichtlich hermitesch ist, wäre hier nicht mehr viel zu zeigen. Da aber ohnehin die

Dimension zu bestimmen ist, reicht es auch, eine Basis von U anzugeben. Um diese zu finden, überlegen wir uns erst, was die Bedingung $A^* = A \quad (*)$ für die Einträge a_{kj} einer Matrix $A \in U$ bedeutet. Sei dazu $a_{kj} = x_{kj} + iy_{kj}$. Es muss wegen $(*)$ also gelten

$$a_{kj} = \overline{a_{jk}} = x_{jk} - iy_{jk} \quad \text{für} \quad k, j = 1, ..., n.$$

Insbesondere müssen die Diagonaleinträge wegen $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ reell sein.

Wir können die Matrix $A \in U$ deshalb folgendermaßen durch Standard–Einheitsmatrizen darstellen. Bezeichne dazu E_{jk} die Matrix, die an der Position j, k eine Eins hat und sonst nur Nullen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \dots & \dots & \overline{a_{n(n-1)}} & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} x_{jk} \left(E_{jk} + E_{kj} \right) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} y_{jk} i \left(E_{jk} - E_{kj} \right)$$

Die Menge $\mathcal{B} = \{E_{ii}, E_{jk} + E_{kj}, i\left(E_{jk} - E_{kj}\right) \;:\; 1 \leq i \leq n; \quad 1 \leq j < k \leq n\}$ erzeugt also U und die Elemente sind linear unabhängig, da die Standard–Einheitsmatrizen linear unabhängig sind. Es handelt sich also um eine Basis von U. Wir müssen also nur noch die Elemente der Basis zählen. Dazu überlegen wir uns, dass es genau n Elemente der Form E_{ii} gibt. Die Anzahl der Elemente der Form $E_{jk} + E_{kj}$ kann man sich beispielweise kombinatorisch überlegen. E_{jk} bezeichnet die Matrix, die an der Position j, k eine Eins hat uns sonst nur Nullen. j und k können beide Werte zwischen 1 und n annehmen und zusätzlich gelte $j \neq k$. Das Besetzen des Eintrags, der nicht Null sein soll, kann man also verstehen als Ziehen ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge von 2 aus n Kugeln verstehen, was uns

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Möglichkeiten liefert. Es ist leicht zu sehen, dass es für Matrizen der Form $i\left(E_{jk} - E_{kj}\right)$ die gleiche Anzahl an Möglichkeiten liefert. Weil die Anzahl der Basiselemente der Dimension eines Vektorraumes entspricht, folgt damit

$$\dim(U) = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

39. Sei A eine *schiefsymmetrische Matrix* mit reellen Einträgen, d.h. es gelte $A = -A^T$. Zeigen Sie: Ist n ungerade, so ist $\det(A) = 0$. Warum ist diese Aussage falsch für $A \in \mathbb{F}_2^{n\times n}$?

40. Zeigen Sie:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}(a+n-1).$$

41. Es seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$. Außerdem schreiben Sie σ und τ als Produkt von Paarvertauschungen und berechnen Sie $\mathrm{sgn}(\sigma)$ und $\mathrm{sgn}(\tau)$.

42. Eine Relation $\sim$ auf X heißt *partielle Ordnung*, wenn die Relation reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist, d.h. aus $x \sim y$ und $y \sim x$ folgt $x = y$. Eine partielle Ordnung heißt *total*, wenn für alle x, y entweder $x \sim y$ oder $y \sim x$ gilt.

Welche der nachfolgenden Relationen auf X ist eine Äquivalenzrelation, partielle Ordnung oder Totalordnung? Im Fall von Äquivalenzrelationen beschreiben Sie die Äquivalenzklassen.

1. Auf $X = \mathbb{Z}$ gilt die Relation $x \sim y$ genau dann, wenn $x \geq y$.
2. Auf $X = \mathbb{Z}$ gilt die Relation $x \sim y$ genau dann, wenn $a + b$ gerade ist.
3. Auf $X = \mathbb{R}$ gilt die Relation $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$.
4. X ist die Menge aller K-Vektorräume und $V \sim W$ genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ gibt.
5. Auf $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt die Relation $(x, y) \sim (a, b)$ genau dann, wenn $x < a$ oder $x = a$ und $y \leq b$.
6. Sei Y eine Menge und X die Menge aller Teilmengen von Y, $A \sim B$ genau dann, wenn $A \subset B$.

39 bis **42** sind abzugeben am **Donnerstag, 23.6.** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Lösungen zur Probeklausur

33. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$

34. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{12}S_2(-1)Q_{12}(1)$ und $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$
$P_{13}Q_{31}(-1)Q_{32}(2)S_3(2)Q_{12}(-2)Q_{13}(1)$. *Das sind freilich nicht die einzigen Lösungen.*

35. *Hier sind die richtigen Aussagen angekreuzt:*
X Der Vektor $(-1,5) \in \mathbb{R}^2$ steht senkrecht auf der Geraden $-x+5y=3$
X $\langle a+b, a\times b\rangle = 0$ für alle $a,b \in \mathbb{R}^3$
☐ In jedem Körper ist $1+1+1+1+1+1 \neq 0$
X $|z-4| > 2$ beschreibt das Komplement einer Kreisscheibe in $\mathbb{C}$
☐ $A \in K^{3\times 4}$ ist invertierbar, wenn $\mathrm{Rang}(A) \geq 2$
☐ $\mathbb{F}_3^3$ hat genau drei eindimensionale Unterräume
☐ $(1,0),(1,1)$ und $(0,1) \in \mathbb{C}^2$ sind linear unabhängig
X Wenn $K^n = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, sind $a_1,\ldots,a_n$ linear unabhängig
X Linear unabhängige $a_1,\ldots,a_k \in K^m$ lassen sich immer zu einer Basis des K^m ergänzen

36. Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$, in der ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = B$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
Nein, denn $\mathrm{Rang}(A) = 2 \neq \mathrm{Rang}(B) = 3$ *, und der Rang ist unabhängig von der Basiswahl immer = Dimension des Bildes, vgl. Aufg.* **30**.

37. V sei ein K–Vektorraum der Dimension 4 , U und W zwei Unterräume von V der Dimension 3 . Beweisen Sie: $\dim(U\cap W) \geq 2$.
Beweis. $U+W \subset V$ *, also* $\dim(U+W) \leq 4$ *, also nach Aufg.* **26**
$\dim(U\cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) \geq 3+3-4 = 2$.

38. V sei ein K–Vektorraum der Dimension n . Zeigen Sie: Genau dann, wenn n gerade ist, gibt es Endomorphismen $A: V \to V$ mit $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Kern}(A)$. Geben Sie ein Beispiel in Form einer Matrix!
Wenn es so ein A gibt, muss nach dem Dimensionssatz (Satz 4.6.2) $\dim(V) = 2\dim(\mathrm{Im}\,(A))$ *gerade sein. Wenn andererseits* $\dim(V) = 2n$ *ist, kann man sich vom Beispiel* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *inspirieren lassen: Man wähle A bzw. die Basis* $e_1,\ldots,e_{2n}$ *so, dass* $\mathrm{Kern}(A) = \langle e_1,\ldots,e_n\rangle$ *und* $A(e_{n+k}) := e_k$ *für alle* $k = 1,\ldots,n$ *ist. Dieses A tut's!*

43. Sei K ein endlicher Körper, der den Körper $\mathbb{F}_p$ enthält. Zeigen Sie: K hat p^n Elemente (für ein $n \in \mathbb{N}$).

44. Finden Sie alle Primpolynome vom Grad 2 in $\mathbb{F}_3[x]$.

45. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrizen A und B aus Aufgabe 36:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

46. Sei $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi \ : \ K^{n\times n} \to K^{n\times n} \,, \quad X \mapsto A \cdot X$$

linear ist. Was ist die Determinante von ϕ ?

43 bis **46** sind abzugeben am **Donnerstag, 30.6.** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Musterlösung zu 40 (Benjes)

Eine Lösungsmöglichkeit für die Aufgabe besteht darin, die Matrix zuerst durch Zeilenumformungen zu vereinfachen, da die Determinante unter diesen invariant ist, um anschließend den Laplaceschen Entwicklungssatz anzuwenden.
Subtrahiert man für $i \in \{2, ..., n\}$ Zeile i von Zeile $i-1$, so erhält man eine Matrix von folgender Form:

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & & \cdots & & a \end{pmatrix}$$

mit

$$a_{ij} = \begin{cases} a-1 & i=j, i<n \\ 1-a & i=j-1, j \in \{2, ..., n\} \\ 1 & i=n, j \in \{1, ..., n-1\} \\ a & i=j=n \end{cases}$$

Diese Matrix entwickelt man nun nach der n–ten (also der letzten) Zeile. Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz lässt sich die Determinante über folgende Formel berechnen:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j}\ a_{nj}\ \det(\widetilde{A}_{nj})$$

Dabei ist $\widetilde{A}_{nj}$ die Matrix, die durch Streichen der n–ten Zeile und j.ten Spalte entsteht. Diese Matrix setzt sich – bei beliebigem aber festen $n \in \mathbb{N}$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$ – zusammen aus einer oberen Dreiecksmatrix links oben und einer unteren Dreiecksmatrix rechts unten. Daher ergibt sich ihre Determinante aus dem Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(\widetilde{A}_{nj}) = \begin{cases} (1-a)^{n-1} & j = 1 \\ (a-1)^{j-1}(1-a)^{n-j} & j \in \{2, ..., n-1\} \\ (a-1)^{n-1} & j = n \end{cases}$$

Das ergibt, eingesetzt in die Entwicklungsformel:

$$\det(A) = (-1)^{n+1} 1 (1-a)^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^{n+j} 1 (a-1)^{j-1}(1-a)^{n-j} \quad + (-1)^{2n} a (a-1)^{n-1}$$

Mit Hilfe von $(1-a) = (-1)(a-1)$ und $(-1)^{n+j+n-j} = 1$ zeigt sich, dass alle Summanden außer dem letzten gleich sind, es bleibt also einfach

$$\det(A) = (n-1)(a-1)^{n-1} + a(a-1)^{n-1} = (a-1)^{n-1}(a+n-1) \quad .$$

Noch eine andere Lösungsmöglichkeit für die Aufgabe: Man definiere

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ v_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und verifiziere, dass

$$A(v_1) = (a+n-1)v_1\ ,\ A(v_j) = (a-1)v_j \quad \text{für alle} \quad j = 2, \ldots, n$$

ist, dass also $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten

$$a+n-1, a-1, a-1, \ldots, a-1$$

sind. Mehr noch: Sie bilden eine Basis des Vektorraums; die lineare Unabhängigkeit von $v_2, \ldots, v_n$ überprüft man elementar, und dass v_1 von diesen linear unabhängig ist, beweise man entweder durch Induktion über n oder mittels der Tatsache, dass v_1 zu einem anderen Eigenwert gehört, vgl. den Beweis von Satz 6.4.2. In dieser neuen Basis ist A darum Diagonalmatrix, ihre Determinante das Produkt der Eigenwerte.

47. Es sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & a & b \\ -1 & 11 & c \\ -12 & d & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}\,.$$

Die Vektoren $(1,1,0)$ und $(0,1,2)$ seien Eigenvektoren von A. Bestimmen Sie a, b, c, d und eine invertierbare Matrix S , sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

48. Prüfen Sie, ob nachfolgende Matrizen über $\mathbb{R}$ und/oder über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind. Berechnen Sie außerdem die geometrischen und algebraischen Multiplizitäten.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

49. Sei $A : K^n \to K^n$ linear und f ein Polynom in $K[x]$.

1. Beweisen Sie: Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(A)$.

2. Beweisen Sie: Wenn $f(A) = 0$, dann $f(\lambda) = 0$ für alle Eigenwerte λ von A.

50. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine $(n\times n)$-Matrix A über einem Körper K heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^k = 0$.

a. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ äquivalent sind:

1. A ist nilpotent.
2. Der einzige Eigenwert von A ist 0.
3. $A^n = 0$.

b. Finden Sie eine reelle (3×3)-Matrix, die zwar 0 als einzigen (reellen) Eigenwert hat, aber nicht nilpotent ist.

47 bis **50** sind abzugeben am **Donnerstag, 7.7.** vor der Vorlesung – in den Kästen, die in der Vorlesung bereitstehen, oder in den Fächern der Tutoren im 3.OG der R–M–Str. 6.

Dieses waren die letzten Hausaufgaben in LinAlg für dieses Semester. Trotz Ermüdungserscheinungen lohnt es sich, bis zum Finale durchzuhalten und diese Aufgaben zu bearbeiten!

Die Themen des Kapitels VI der Vorlesung laden ganz besonders dazu ein, dazu Klausuraufgaben auszudenken...

Ein paar letzte weise Ratschläge für die Klausur: Einen gut durchdachten Spickzettel herstellen und einpacken, Papier und Schreibzeug nicht vergessen, ebenso Goethecard/Personalausweis. Aufgaben unbedingt sorgfältig durchlesen; nichts ist ärgerlicher, als später festzustellen, dass man das eigentlich gestellte Problem gar nicht bearbeitet hat.

Vergewissern Sie sich bei Ihrem Tutor, dass Sie zur Klausur zugelassen sind. Die Liste aller Leute, die zur Nachklausur der letzten LA–Vorlesung zugelassen waren (WiSe 15/16, Stix), liegt mir vor. Wer sich auf noch ältere Zulassungen stützen möchte, muss einen irgendwie gearteten Nachweis beibringen.

Extra–Service unseres fleißigen Tutors Thomas Fischer: Am letzten Tag des Semesters, also Freitag, den 15. Juli um 15 Uhr, wird er ein Trainings–Tutorium im Raum 308 der Robert–Mayer–Str. 6 abhalten, offen für alle Klausurteilnehmer.

Und zuguterletzt noch eine halbe **Musterlösung zu 48 ,** jetzt hoffentlich ohne Rechenfehler(?):

Das charakteristische Polynom berechne man einfach nach der Sarrus–Regel. Für die erste Matrix A erhält man $\chi_A(x) = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$. Probieren liefert die Nullstelle $\lambda = 2$, Polynomdivision ergibt $\chi_A(x) : (x-2) = x^2 - 8x + 12$ mit den weiteren Nullstellen $\lambda = 4 \pm \sqrt{4} = 2$ bzw. 6 . $\lambda = 6$ hat also die algebraische Multiplizität 1 , $\lambda = 2$ algebraische (:= Nullstellen–)Multiplizität 2 . Die geometrische Multiplizität (:= Dimension des zugehörigen Eigenraums =) $\dim \operatorname{Ker}(2E - A)$ ist hier aber ebenfalls 2 nach dem Dimensionssatz, weil der Rang von $2E - A$ nur $= 1$ ist, die Matrix ist also diagonalisierbar, und zwar sowohl über $\mathbb{R}$ wie über $\mathbb{C}$. Nebenbei bemerkt: An der Diagonalisierung sieht man, dass $M_A(x) = (x-2)(x-6)$ aus den gleichen Primpolynomen wie $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-6)$ besteht (so sollte es sein!), aber keinen Primfaktor in höherer Potenz hat; es ist also kein Jordan–Kästchen vom Format > 1 erforderlich.

Die zweite Matrix B liefert $\chi_B(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$. Raten und Polynomdivision wie oben ergibt die Eigenwerte $\lambda = 3$ und $2 \pm \sqrt{-1}$, B ist also über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, wohl aber über $\mathbb{C}$, weil drei paarweise verschiedene Eigenwerte auftreten (Satz 6.4.2). Algebraische und geometrische Vielfachheiten sind alle $= 1$, und hier ist $M_B = \chi_B \in \mathbb{R}[x]$, auch wenn das Polynom in diesem Polynomring nicht in Linearfaktoren zerfällt.