—— Blatt 1 ——

Aufgabe 1. Das sog. *Schlangenlemma* ist ein einfaches aber sehr wichtiges Resultat aus dem Gebiet der homologischen Algebra. Im folgenden kommutativen Diagramm sind die durchgezogenen horizontalen und vertikalen Sequenzen exakt. Zu zeigen ist, dass dann auch die Kern-Kokern-Sequenz exakt ist. Dafür muss zunächst der Verbindungshomomorphismus d konstruiert werden.

$$
\begin{tikzcd}
& \ker a \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \ker b \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \ker c \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, "d"] & \\
& A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "a"] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "b"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
& \operatorname{coker} a \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} b \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} c &
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 2. Konstruktionen wie Produkte, projektive Limites, etc. sind bis auf (eindeutigen) Isomorphismus eindeutig. Warum ist dies so? Allgemein lassen sich Objekte mit universellen Eigenschaften als *terminale* Objekte in einer geeigneten Kategorie auffassen.

(i) Zeigen Sie, dass ein terminales Objekt in einer Kategorie C, falls es existiert (!), bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Weiter ist dieser Isomorphismus sogar eindeutig.

(ii) Sei $F : D \to C$ ein Funktor. Überlegen Sie sich, dass die universelle Eigenschaft von $\lim F$ eine Kategorie beschreibt, in der $\lim F$ (falls dieser existiert!) ein terminales Objekt ist.

Aufgabe 3. Sei $F : D \to C$ mit der Diagramm-Kategorie $D = \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ und $C = (\mathrm{Set})$. Was ist hier der Limes $\lim F$ und was der Kolimes $\operatorname{colim} F$?

Aufgabe 4. Die Kategorie der Mengen (Set) nimmt eine besondere Rolle ein, da die Morphismen $C(x, y)$ in einer Kategorie C Mengen sind. Es ist daher hilfreich, universelle Konstruktionen in (Set) zu verstehen. Zum Beispiel sind Limes $\lim F$ und Kolimes $\operatorname{colim} F$ eines Funktors $F : D \to C$ eindeutig durch folgende (natürliche) Isomorphismen charakterisiert:

$$C(\bullet, \lim F) \cong \lim C(\bullet, F(d))$$
$$C(\operatorname{colim} F, \bullet) \cong \lim C(F(d), \bullet)$$

Beachte, dass die rechten Limites in (Set) sind!