Algebraische Geometrie 2
Prof. Dr. Annette Werner

—— Blatt 2 ——

1 Kettenkomplexe und Homotopie

Für zwei Kettenkomplexe X, Y in R-Moduln definieren wir das Tensorprodukt als:

$$(X \otimes Y)_n = \bigoplus_{i+j=n} X_i \otimes Y_j$$

mit Differential

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^i x \otimes dy,$$

für $x \in X_i$ und $y \in Y_j$.

Als nächstes definieren wir das sogenannte *Intervallobjekt* I in der Kategorie der Kettenkomplexe $\mathrm{Ch}_\bullet(\mathrm{Mod}(R))$:

$$I = [\cdots \leftarrow 0 \leftarrow I_0 \leftarrow I_1 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots]$$

mit $I_0 = \langle [0], [1] \rangle$ (von Variablen [0] und [1] frei erzeugter R-Modul) und $I_1 = \langle [01] \rangle$ uns $d([01]) = [0] - [1]$.

Ähnlich wie in der Topologie definieren wir nun eine *Homotopie* $h : f \Rightarrow g$ von Morphismen $f, g : X \to Y$ von Kettenkomplexen als eine Kettenabbildung $h : X \otimes I \to Y$ mit $h(x, [0]) = f(x)$ und $h(x, [1]) = g(x)$.

In einer beliebigen abelschen Kategorie A haben wir leider kein Tensorprodukt. Daher definiert man allgemeiner eine Kettenhomotopie $h : f \Rightarrow g$ zwischen Kettenabbildungen $f, g : X \to Y$ als eine Sequenz von Morphismen $h_i : X_i \to Y_{i+1}$ mit $dh + hd = f - g$, d. h. $d_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i = f_i - g_i$.

Aufgabe 1.1. *Zeigen Sie, dass für $A = \mathrm{Mod}(R)$ beide Definitionen äquivalent sind.*

Aufgabe 1.2. *Zeigen Sie, dass homotope Kettenabbildungen die gleichen Abbildungen in Homologie induzieren.*

Aufgabe 1.3. *Machen Sie sich klar, wie sich die Konstruktionen auf Kokettenkomplexe, etc. übersetzen.*

2 Hom-Funktoren

2.1 Yoneda-Lemma

Das Yoneda-Lemma ist ein einfaches aber weitreichendes Resultat aus der Kategorientheorie. Es besagt...

Aufgabe 2.1. *Sei* $F : C \to \mathrm{Set}$ *ein beliebiger und* $H^X = \mathrm{Hom}(X, \bullet) : C \to \mathrm{Set}$ *der von* $X \in C$ *dargestellte Funktor. Dann ist*

$$\begin{aligned} \mathrm{Yon}_X : \mathrm{Hom}(H^X, F) &\to F(X) \\ \eta &\mapsto \eta_X(1_X) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus (von Mengen). Weiter sind die Yon_X *kompatibel: Für* $X \to Y$ *hat man* $F(X) \to F(Y)$ *sowie* $H^Y \to H^X$*, also* $\mathrm{Hom}(H^X, F) \to \mathrm{Hom}(H^Y, F)$ *und Kompatibilität bedeutet gerade, dass das Quadrat*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(H^X, F) \arrow[r] \arrow[d] & F(X) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}(H^Y, F) \arrow[r] & F(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Als Korollar erhält man die sogenannte *Yoneda-Einbettung*:

Aufgabe 2.2. *Die Zuordnung*

$$X \mapsto H^X$$

definiert einen Funktor $H^\bullet : C^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}^C$*. Dieser ist eine volltreue Einbettung.*

Dual dazu erhält man also auch eine volltreue Einbettung

$$H_\bullet : C \to \hat{C} = \mathrm{Set}^{C^{\mathrm{op}}}.$$

Diese hat nützliche Konsequenzen: Sagen wir, wir haben eine Kategorie C. Vielleicht existieren in C bestimmte Limiten nicht, d. h. C ist nicht *vollständig*. Was wir dann tun können ist C als eingebettet in $\hat{C}$ auffassen. Aus der Vollständigkeit von Set folgt die Vollständigkeit von Set^D für jede (kleine) Kategorie D.

Aufgabe 2.3. *Warum ist dem so?*

Also können wir unseren Limes in $\hat{C}$ berechnen.

2.2 Injektive und projektive Objekte

Ein R-Modul P heißt *projektiv*, wenn $\mathrm{Hom}(P, \bullet)$ nicht nur links-exakt, sondern sogar exakt ist. Dual nennt man Q *injektiv*, wenn $\mathrm{Hom}(\bullet, Q)$ exakt ist.

Projektive Objekte sind eine Verallgemeinerung von freien Moduln:

Aufgabe 2.4. *Zeigen Sie, dass jeder freie Modul projektiv ist und folgern Sie daraus, dass die Kategorie der R-Moduln* genügend projektive *enthält.*

Aufgabe 2.5. *Ein Modul P ist genau dann projektiv, wenn dieser ein direkter Summand eines freien Moduls ist.*

Aufgabe 2.6. *Folgern Sie, dass projektive Moduln flach sind. Man hat also*

$$\text{frei} \subset \text{projektiv} \subset \text{flach}.$$

In der Tat wird man später häufig einfach nur *projektive Auflösungen* konstruieren, in denen alle Terme sogar frei sind.

Projektive Moduln sind also gut verstanden. Wie sieht es mit injektiven aus? Ein wichtiges Beispiel für einen injektiven $\mathbb{Z}$-Modul ist $Q = \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.7. $Q = \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$ *ist ein injektiver* $\mathbb{Z}$*-Modul.*

Für den Fall $R = \mathbb{Z}$ können wir die injektiven Objekte tatsächlich als die *teilbaren abelschen Gruppen* klassifizieren. Für allgemeinere R hilft *Baer's Kriterium.*

Fazit: Obwohl projektive Moduln einfach zu verstehen sind und injektive Objekte ja nur duale Eigenschaften erfüllen, überträgt sich die Handlichkeit nicht so gut.