Algebraische Geometrie 2
Prof. Dr. Annette Werner

—— Blatt 3 ——

1 Die Kategorien der Prägarben und Garben

1.1 Schnitte, Halme und Exaktheit

Die Kategorie der Prägarben bzw. Garben über einem topologischen Raum X sind abelsch.

Für $U \subset X$ offen definiert

$$\Gamma(U, \bullet) : F \mapsto F(U)$$

einen Funktor PSh → Ab und insb. Sh → PSh → Ab. Man nennt $F(U)$ die *Schnitte über* U und Γ eben den *Schnitte-Funktor*.

Für $u \in X$ definiert

$$F \mapsto \varinjlim_{u \in U} F(U)$$

ebenfalls Funktoren PSh → Ab, bzw. Sh → Ab (Ab ist kovollständig). Diese heißen *Halm-Funktoren*. Es sind gewissermaßen die Schnitte über dem Punkt u. Analog lassen sich dann auch „Schnitte“ über abgeschlossenen Mengen konstruieren.

Aufgabe 1. All diese Funktoren sind offensichtlich additiv. Aber wie sieht es mit Exaktheit aus? Gib Gegenbeispiele an oder versuche Beweise zu finden.

Aufgabe 2. Für Garben haben wir gelernt, dass Exaktheit äquivalent dazu ist, dass alle Halme (einer Sequenz von Garben) exakt sind. Können wir hier die Halme durch Schnitte oder/und Garben durch Prägarben ersetzen?

Die Rechtsableitung von *additiven kovarianten* Funktoren ist über injektive Auflösungen definiert. In der Kategorie der Garben gibt es genügend Injektive: Wir haben das in Vorlesung mithilfe der Halme gesehen.

Aufgabe 3. Wie verhalten sich die Eigenschaften *monomorph* und *injektiv* (also dual zu epimorph bzw. projektiv) bei der Inklusion Sh → PSh?

1.2 Welke Garben

Für die folgenden zwei Aufgaben seien (F_α) ein *gerichtetes* System in $\mathrm{Sh}(X)$ und X *noethersch*!

Aufgabe 4. ([Har77, Kapitel 3, Lemma 2.8]) Sind die F_α welk, so auch der direkte Limes $\varinjlim_\alpha F_\alpha$.

Aufgabe 5. ([Har77, Kapitel 3, Lemma 2.9]) Die natürlichen Morphismen

$$\varinjlim_\alpha H^i(X, F_\alpha) \to H^i(X, \varinjlim_\alpha F_\alpha)$$

sind Isomorphismen für $i \geq 0$.

Aufgabe 6. ([Har77, Kapitel 3, Lemma 2.10]) Sei nun $j : Y \to X$ die Inklusion einer abgeschlossenen Menge $Y \subset X$ und X nicht notwenig noethersch. Es gilt

$$H^i(Y, F) = H^i(X, j_* F),$$

wobei $j_* F$ die Fortsetzung von F durch Null außerhalb von Y bezeichnet.

Literatur

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.