Algebraische Geometrie 2
Prof. Dr. Annette Werner

— Blatt 4 —

1 Riemann-Roch für Kurven

Dieses mal wollen wir versuchen, den Satz von Riemann-Roch zu verstehen. Als Quelle ist zum Beispiel [Har77, p. 295] geeignet. Oder Abschnitte 1 bis 3 in [Vak00].

Wir arbeiten in der Kategorie der Schemata über dem *algebraisch abgeschlossenen* Körper k:

$$\mathrm{Sch}\,/k = \mathrm{Sch}\,/\,\mathrm{Spec}(k).$$

Theorem 1.1 (Riemann-Roch)**.** *Seien X eine Kurve von Geschlecht g und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X von Grad d. Dann gilt*

$$h^0(X,\mathcal{L}) - h^0(X,\omega\otimes\mathcal{L}^\vee) = d - g + 1.$$

Zunächst zu den Begriffen:
Eine **Kurve** (über k) ist

(i) irreduzibel ($\rightsquigarrow$ generischer Punkt $\rightsquigarrow$ rationale Funktionen)

(ii) reduziert

(iii) eindimensional ($\rightsquigarrow \omega = \Omega^1$)

(iv) eigentlich (über k) ($\rightsquigarrow$ projektiv $\rightsquigarrow$ *Serre-Dualität*)

(v) und hat reguläre lokale Ringe ($\rightsquigarrow$ *Serre-Dualität*).

Für $k = \mathbb{C}$ ist eine solche Kurve eine sogenannte *Riemannsche Fläche* hat eine Invariante: die Anzahl der „Henkel“, welche als das Geschlecht g von X bezeichnet wird. Allgemeiner definiert man das **Geschlecht** von X als die Dimension des k-Vektorraums der globalen 1-Formen auf X

$$g = h^0(X,\Omega^1) = \dim H^0(X,\Omega^1).$$

(„Dimension“ macht Sinn, da Ω^1 ein $\mathcal{O}$-Modul ist, $H^0(X,\Omega^1)$, also ein $H^0(X,\mathcal{O}) = \mathcal{O}(X) = k$-Modul)

Ein **Geradenbündel** $\mathcal{L}$ über X ist nach Definition eine lokal freier $\mathcal{O}$-Modul von Rang 1. Der **Grad** d eines Geradenbündels ist über die Korrespondenz zwischen Geradenbündeln (modulo Isomorphie) und Divisoren (modulo linearer Äquivalenz)

$$\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Cl}(X)$$

(wohl)definiert. Ist etwa $\mathcal{L}$ assoziiert zu $[D]$ mit Divisor $D = \sum_i n_i P_i$, so ist $\deg\mathcal{L} = \sum_i n_i$. Die Zuordnung $D \mapsto \mathcal{O}(D) = \mathcal{L}$ ist übrigens wie folgt gegeben: $\mathcal{O}(-P)$ ist die Garbe der rationalen Funktionen f, die bei P verschwinden, d. h. wo $\mathrm{val}_P(f) + (-1) \geq 0$

gilt. Allgemeiner wird dann $\mathcal{O}(D)$ für $D = \sum_i n_i P_i$ als eben die Garbe der rationalen Funktionen f mit $(f) + D \geq 0$ definiert. Dabei ist (f) der Null-/Polstellendivisor und $\sum_i n_i P_i \geq 0 \Leftrightarrow \forall i : n_i \geq 0$ (effektiver Divisor). Man beachte, dass wir hier die Eigenschaft von X brauchen, *irreduzibel* zu sein - sonst macht es erst mal keinen Sinn von rationalen Funktionen zu sprechen.

Schließlich noch zu $\omega \otimes \mathcal{L}^\vee$: ω ist das sogenannte **kanonische Geradenbündel** und stimmt für Kurven X mit Ω^1, der Garbe der 1-Formen überein. $\mathcal{L}^\vee$ ist das zu $\mathcal{L}$ **duale** Geradenbündel, definiert über die „Hom-Garbe“:

$$\mathcal{L}^\vee = \mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$$

und erfüllt (kanonisch)

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee \simeq \mathcal{O}.$$

Literatur

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[Vak00] Ravi Vakil. Baby algebraic geometry seminar: An algebraic proof of riemann-roch, 2000. `http://math.stanford.edu/~vakil/725/bagsrr.pdf`.