Algebraische Geometrie 2
Prof. Dr. Annette Werner

—— Blatt 5 ——

Diesmal werden wir uns nochmal mit Divisoren und Geradenbündeln auseinandersetzen.

1 Weil-Divisoren

In [Wer16, Definition 6.12] werden die *Weil-Divisoren* $Div(X)$ auf X eingeführt. Dabei werden einige Eigenschaften an X gefordert:

(i) noethersch

(ii) integer

(iii) separiert

(iv) regulär in Kodimension eins.

Dass X integer, also insb. irreduzibel ist hat als Konsequenz die Existenz eines generischen Punktes und somit eines rationalen Funktionenkörpers:

$$K(X).$$

Wichtig ist zunächst nur die Eigenschaft, dass wir jedem Primdivisor Y (abgeschl. irred. Unterschema) eine *diskrete* Bewertung v_Y zuordnen können mit der man dann die Null- und Polstellenordnung eines $f \in K(X)$ entlang Y definieren kann. Dies folgt daraus, dass X regulär in Kodimension eins, also der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ mit

$$Y = \overline{\{\eta\}}$$

(Y ist selbst irreduzibel!) ein regulärer lokaler Ring mit $\dim \mathcal{O}_{X,\eta} = 1$ ist. Nach [Wer16, Satz 6.8] ist dann $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein diskreter Bewertungsring. Die Separiertheit kann man dazu nutzen, um Y aus $\mathcal{O}_{X,\eta}$ zurückzugewinnen ([Har77, Ex. 4.5]).

Schließlich wird der Gruppenhomomrphismus div

$$\begin{aligned} K(X)^\times &\to \mathrm{Div}(X) \\ f &\mapsto \sum v_Y(f) \cdot Y \end{aligned}$$

definiert, wobei die Summe über *alle* Primdivisoren in X indiziert. Die Wohldefiniertheit folgt aus [Wer16, Lemma 6.13]. Hierfür geht entscheidend die Noetherschheit von X ein.

Wir erhalten insb. die k.e.S. abelscher Gruppen

$$K(X)^\times \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{CH}^1(X) \to 0$$

mit der *ersten Chow-Gruppe* $CH^1(X)$ von X.

2 Cartier-Divisoren

Kommen wir nun zu *Cartier-Divisoren*. Ist X wieder eine integres Schema mit rationalen Funktionenkörper $K(X) = \mathcal{O}_{X,\eta}$. Da X insb. zusammenhängend ist, definiert die Prägarbe

$$U \mapsto K(X)$$

sogar eine Garbe $\mathcal{K}$. Ein Cartier-Divisor ist dann einfach ein globaler Schnitt von $\mathcal{K}^\times/\mathcal{O}^\times$. Sei D ein solcher Cartier-Divisor. Dann können wir D als globalen Schnitt darstellen durch kompatible lokale Schnitte $\overline{f}_i \in K(X)^\times/\mathcal{O}(U_i)^\times$ (über U_i). Kompatibilität bedeutet, dass über dem Schnitt $U_{ij} = U_i \cap U_j$ gilt:

$$\overline{f}_{i|U_{ij}} = \overline{f}_{j|U_{ij}} \in K(X)^\times/\mathcal{O}(U_{ij})^\times,$$

d. h. für Lifts

$$f_{i|U_{ij}}/f_{j|U_{ij}} \in \mathcal{O}(U_{ij})^\times$$

Ein Cartier-Divisor ist also durch das Datum einer offenen Überdeckung $\{U_i\}$ und rationalen Funktionen $f_i \in K(X)^\times$ mit $f_i/f_j \in \mathcal{O}(U_{ij})^\times$ gegeben.

3 Geradenbündel

Schließlich definieren wir noch *Geradenbündel* als lokal freie $\mathcal{O}_X$-Moduln von Rang eins. Das Tensorprodukt $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ definiert dann eine Gruppenstruktur auf $\mathrm{Pic}(X)$, der Menge der *Isomorphieklassen* von Geradenbündeln auf X. Das neutrale Element ist $[\mathcal{O}_X]$ und $[\mathcal{L}^\vee] = [\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)]$ das Inverse zu $[\mathcal{L}]$. Üblicherweise lässt man die Isomorphieklassen-Klammern [] in den Notationen aus.

4 Korrespondenzen

Versuchen wir nun diese drei Konzepte miteinander in Beziehung zu bringen! Also muss X schonmal wieder noethersch, integer, separiert und regulär in Kodimension eins sein (siehe Weil-Divisoren).

Sei D ein Cartier-Divisor, repräsentiert durch $(U_i, f_i)_i$.

D definiert einen Weil-Divisor wie folgt: Für einen Weil-Primdivisor Y (mit Bewertung v_Y) ist

$$v_Y(D) = v_Y(f_i)$$

wohldefiniert, denn für $Y \cap U_j \neq \emptyset$ ist $f_i/f_j \in \mathcal{O}(U_{ij})^\times \subset K(X)^\times$, also $v_Y(f_i/f_j) = 0$. Und wir erhalten den Weil-Divisor

$$\sum_Y v_Y(D) \cdot Y.$$

Diese Zuordnung definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma(X, \mathcal{K}^\times/\mathcal{O}^\times) \to \mathrm{Div}(X),$$

der für reguläre X (d. h. *alle* lokalen Ringe sind regulär) sogar ein Isomorphismus ist ([Wer16, Prop. 6.18]).

Andererseits können wir aus D auch ein Geradenbündel konstruieren: Dazu betrachten wir ganz einfach die lange exakte Kohomologiesequenz zu

$$0 \to \mathcal{O}^\times \to \mathcal{K}^\times \to \mathcal{K}^\times/\mathcal{O}^\times \to 0.$$

Diese liefert uns nämlich

$$\cdots \to \Gamma(X, \mathcal{K}^\times) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^\times/\mathcal{O}^\times) \to H^1(X, \mathcal{O}^\times) \to H^1(X, \mathcal{K}^\times) = 0 \to \cdots,$$

wobei „$= 0$“ aus der Tatsache folgt, dass $\mathcal{K}^\times$ eine konstante, also welke Garbe ist. Jetzt muss man nur noch wissen, dass Elemente in $H^1(X, \mathcal{O}^\times)$ nichts anderes als Isomorphieklassen von Geradenbündeln sind!

5 Hauptdivisoren

Die zu Hauptdivisoren assoziierten Geradenbündel sind die zum trivialen isomorphen. Folglich sollten die Hauptdivisoren im Sinne von Cartier gerade das Bild von

$$\Gamma(X, \mathcal{K}^\times) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^\times/\mathcal{O}^\times)$$

sein. Diese Abbildung nennt man ebenfalls div. Glücklicherweise ist das aber mit der oben genannten Isomorphie zwischen Weil- und Cartier-Divisoren verträglich:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathcal{K}^\times) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "="'] & \Gamma(X, \mathcal{K}^\times/\mathcal{O}^\times) \arrow[d] \\
K(X)^\times \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & \mathrm{Div}(X)
\end{tikzcd}$$

6 Beispiel

Was ist $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^\times)$? Ist auf $\mathbb{P}^1$ jeder Divisor eine Hauptdivisor? Schneiden f und g (Funktionen auf $\mathbb{P}^1$) zwei Primdivisoren $Y = \{f = 0\}$ und $Y' = \{g = 0\}$ aus und haben beide den selben Grad, dann ist $f/g \in K = K(\mathbb{P}^1)$ eine rationale Funktion mit Nullstellen $\{f = 0\}$ und Polstellen $\{g = 0\}$, also

$$\mathrm{div}(f/g) = Y - Y'.$$

Das zeigt, dass je zwei Primdivisoren von selben Grad *linear äquivalent* sind (d. h. sich nur um einen Hauptdivisor unterscheiden, bzw. die selbe Isomorphieklasse in $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$ repräsentieren). In der Tat induziert die Gradabbildung

$$\mathrm{Div}(\mathbb{P}^1) \to \mathbb{Z}$$

einen Isomorphismus

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) \cong \mathrm{CH}^1(\mathbb{P}^1) \to \mathbb{Z}.$$

Man sollte sich überlegen, was das für Elemente in $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^\times)$ bedeutet, indem man mit Čech-Kohomologie arbeitet. Hinweis: $\mathbb{P}^1$ hat eine ziemlich übersichtliche Überdeckung aus offen affinen.

Literatur

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[Wer16] Annette Werner. Algebraische geometrie ii, 2016. `http://www.uni-frankfurt.de/61796444/alggeomII1314.pdf`.