Prof. Dr. Annette Werner
M.Sc. Adrian Zorbach



# —— Blatt 2 ——

Abgabe bis 31. Oktober, 10 Uhr im Fach zum Tutorium.

In der Vorlesung haben wir gelernt, wie ein Betrag $|\cdot|$ auf $K$ eine Metrik $d$ induziert. Auch haben wir gesehen, wie man mithilfe von $d$ den Begriff *offen* definieren kann: $d$ induziert eine *Topologie* auf $K$.

Dieses Übungsblatt beschäftigt sich mit eben dieser Topologie. Wir wollen zeigen, dass die Körperoperationen: Addition, Multiplikation, etc. alle *stetig* sind. Deswegen darf man dann z. B. *Limites* und + vertauschen:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n.$$

Die Operationen, die wir betrachten wollen sind:

$$\begin{aligned}
\mathrm{add} &: K \times K \to K,\ (x,y) \mapsto x+y \\
\mathrm{neg} &: K \to K,\ x \mapsto -x \\
\mathrm{mul} &: K \times K \to K,\ (x,y) \mapsto xy \\
\mathrm{inv} &: K^\times \to K,\ x \mapsto x^{-1},
\end{aligned}$$

wobei $K^\times = K \setminus \{0\}$ die Einheiten in $K$ sind.

Allgemein heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $X$ und $Y$ *stetig*, wenn Urbilder offener Mengen offen sind. Also für jede offene Menge $V \subset Y$ soll auch $f^{-1}(V) = \{x \in X\,;\, f(x) \in V\} \subset X$ offen sein.

Zur Erinnerung: Eine Topologie auf $X$ besagt nichts weiter, als wann eine Teilmenge $U \subset X$ *offen* heißt. Dabei muss der Begriff von 'Offenheit' verträglich sein mit *endlichen Schnitten* und *beliebigen Vereinigungen*. Weiter sollen die *leere Menge* $\emptyset$ und der ganze Raum $X \subset X$ offen sein.

*Überlegen* Sie sich was die von der Metrik $d$ induzierten offenen Mengen in $K$, $K^\times$ und $K \times K$ sind! (Hinweis: Offene Bälle)

**Aufgabe 1.** (4 Punkte) Um eine Intuition für die Topologien auf $K$, $K^\times$ und $K \times K$ zu bekommen, versuchen Sie nun herauszufinden *und zu beweisen*, welche der folgenden Mengen offen bzw. nicht offen sind.

(i) $K^\times \subset K^\times$

(ii) $K^\times \subset K$

(iii) $\{(x,y)\,;\, x = y\} \subset K \times K$

(iv) $\{(x,y)\,;\, x^2 = y^3\} \subset K \times K$

(v) $\{(x,y)\,;\, x \neq y\} \subset K \times K$

(vi) $\{(x,y)\,;\, x^2 \neq y^3\} \subset K \times K$

(vii) $\{(x,y)\,;\, |x| \leq 1\} \subset K \times K$

(viii) $\{x\,;\, |x+1| < 2\} \subset K^\times$

Vielleicht können Sie ein Muster erkennen?

Hinweis: Sie dürfen auch benutzen, dass Addition und Multiplikation stetig sind.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte) Zeigen Sie, dass add stetig ist. Die Beweise, dass neg, mul und inv stetig sind, sind freiwillig.

Hinweis: Für die Stetigkeit der Addition müssen Sie also im Endeffekt zeigen, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in K$ mit $d(x, x_0) < \delta$ und $d(y, y_0) < \delta$ auch $d(x+y, x_0+y_0) < \epsilon$ gilt.