Prof. Dr. Annette Werner
M.Sc. Adrian Zorbach

—— Blatt 5 ——

Abgabe bis 21. November, 10 Uhr im Fach zum Tutorium.

Wir haben in der Vorlesung den Satz von Ostrowski bewiesen. Dieser klassifiziert die Beträge auf $\mathbb{Q}$ - bis auf *Äquivalenz*: Ein Betrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu

- dem trivialen Betrag $|\cdot|_0$ (*nicht-archimedisch*),
- einem p-adischen Betrag $|\cdot|_p$ (*nicht-archimedisch*),
- oder dem *archimedischen* Betrag $|\cdot|_\infty$.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass wir in obiger Auflistung tatsächlich eine eindeutige Einteilung haben, d. h. für Primzahlen $p \neq q$ sind die Beträge $|\cdot|_0$, $|\cdot|_p$, $|\cdot|_q$ und $|\cdot|_\infty$ paarweise nicht äquivalent.

Hinweis. Können ein archimedischer und ein nicht-archimedischer Betrag äquivalent sein?

Aufgabe 2. (4 Punkte) Gegeben zwei äquivalente Beträge $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ auf $\mathbb{Q}$. Wir wissen bereits, dass es dann ein $\alpha > 0$ gibt mit

$$|x|_1 = |x|_2^\alpha$$

für alle $x \in \mathbb{Q}$.

Die Frage ist nun umgekehrt: Für welche $\alpha > 0$ ist $|\cdot|^\alpha$ wieder ein (notwendig äquivalenter) Betrag, wenn $|\cdot|$ ein Betrag auf $\mathbb{Q}$ ist?