Prof. Dr. Annette Werner
M.Sc. Adrian Zorbach

Nicht-archimedische Zahlen
Wintersemester 2016/17

—— Blatt 6 ——

Abgabe bis 28. November, 10 Uhr im Fach zum Tutorium.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei K ein Körper, $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf K und $\mathcal{C} = \mathcal{C}(K, |\cdot|)$ die Menge aller Cauchy-Folgen auf K bezüglich $|\cdot|$. Zeigen Sie:

(i) Zusammen mit der gliedweise definierten Addition und Multiplikation ist $\mathcal{C}$ ein kommutativer Ring mit Eins.

(ii) Die Teilmenge $\mathcal{N} = \{(x_n)_{n\geq 1} \mid |x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0\} \subset \mathcal{C}$ aller Nullfolgen ist ein Ideal in $\mathcal{C}$.

Bemerkung. Wir dürfen also den Quotienten $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ bilden und erhalten so die *Komplettierung* von K bzgl. $|\cdot|$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Welche der folgenden Folgen in $\mathbb{Q}$ sind Cauchy bzgl. $|\cdot|_p$? Welche sind konvergent?

(i) $(p^n)_n$

(ii) $(1/n)_n$

(iii) $(n!)_n$

(iv) $(\sum_{i=0}^{n} p^i)_n$