Prof. Dr. Annette Werner
M.Sc. Adrian Zorbach

—— Blatt 7 ——

Abgabe bis 05. Dezember, 10 Uhr im Fach zum Tutorium.

Hinweis: Das Skript zur Vorlesung wurde aktualisiert.

Aus der Analysis kennen wir die *geometrische Reihe* und die Darstellung

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

wenn $0 < x < 1$ gilt. Der Beweis ging so: Links steht der Limes der Partialsummen $\left(\sum_{i=0}^{N} x^i\right)_N$ und für jedes N gilt (*Teleskopsummen-Trick*)

$$(1-x)\left(\sum_{i=0}^{N} x^i\right) = x^0 - x^{N+1}.$$

Für $N \to \infty$ wird das zu

$$(1-x)\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) = 1 - 0.$$

Wichtig ist dabei

$$x^{N+1} \to 0$$

für $N \to \infty$ und das haben wir wegen $0 < x < 1$.

Auf der anderen Seite ist $\frac{1}{1-x}$ für jedes $x \neq 1$ wohldefiniert! Nehmen wir statt $|\cdot|_\infty$ jetzt $|\cdot|_2$, dann gilt $2^i \to 0$ und die Reihe konvergiert auch für $x = 2$, und zwar gegen -1.

Aufgabe 1.(4 Punkte) Finden Sie für jede Primzahl p eine Darstellung der -1, d. h. eine Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i = -1$$

mit Koeffizienten $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Für positive ganze Zahlen ist es noch einfacher: Versuchen Sie sich an 1234 statt -1 für konkret $p = 5$.

Hinweis. Proposition 7.7 iii)

Bemerkung. Mit von Proposition 7.7 werden wir später sogar beweisen, dass *jedes* $x \in \mathbb{Z}_p$ eine *eindeutige* Darstellung als $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ mit $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$ hat (Korollar 7.13).

Aufgabe 2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass analog zur Dichtheit von $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ auch der Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \{\frac{a}{b}\,|,\ a \in \mathbb{Z}, b = p^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ liegt.

Hinweis. Lemma 7.2 und Proposition 7.7 ii)