Prof. Dr. Annette Werner
M.Sc. Adrian Zorbach

Nicht-archimedische Zahlen
Wintersemester 2016/17

—— Blatt 9 ——

Abgabe bis 19. Dezember, 10 Uhr im Fach zum Tutorium.

Aufgabe 1. (4 Punkte) In den reellen Zahlen ist $\mathbb{Z}$ abgeschlossen. Gilt das auch in $\mathbb{Q}_p$?

- Berechnen Sie den Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}_p$.
- Folgern Sie, dass in $\mathbb{Q}_p$ gilt: Cauchy-Folgen in $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_p$ konvergieren in $\mathbb{Q}_p$ mit einem Grenzwert in $\mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

- Zeigen Sie, dass eine p-adische Zahl $x = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n p^n$ mit $0 \leq a_n \leq p-1$ in $\mathbb{Q}$ liegt, wenn die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ periodisch wird, d. h. wenn es einen Index $N \geq n_0$ und eine natürliche Zahl k gibt mit der Eigenschaft $a_{n+k} = a_n$ für alle $n \geq N$.
- Finden Sie die rationale Zahl, die durch die 3-adische Reihe

$$2 + 3 + 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3^4 + 3^6 + 2 \cdot 3^7 + 3^8 + 3^{10} + 2 \cdot 3^{11} + 3^{12} + \dots$$

(Die Ziffernfolge ist also 21121012101210...) dargestellt wird.

Hinweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis der Rationalität periodischer Dezimalbrüche.

Bemerkung. Die Periodizität der Dezimalbruchentwicklung ist auch bei $\mathbb{R}$ eine Charakterisierung der rationalen Zahlen.