Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
22, Dezember 2016

Funktionentheorie und DGL
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 5 - Teil B

Aufgabe 1. *Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten.*

(a) Zeigen Sie, dass $z^{-2}f(z^{-1})$ in einer punktierten Umgebung von 0 holomorph ist, und dass

$$\operatorname{res}_0(z^{-2}f(z^{-1})) = \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{res}_a f(z)$$

gilt.

(b) Zeigen Sie:

$$\int_\gamma \frac{5z^6+4}{2z^7+1}dz = 5\pi i,$$

wobei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch $\gamma(t) := \exp(it)$.

Hinweis: Verwenden Sie Teil (a).

Aufgabe 2. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in D$. Zeigen Sie, dass das Residuum einer holomorphen Funktion $f\colon D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ in einer Singularität a die eindeutig bestimmte komplexe Zahl c ist, so dass die Funktion*

$$h(z) := f(z) - \frac{c}{z-a}$$

in einer geeigneten punktierten Umgebung von a eine Stammfunktion besitzt.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 12. Januar** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.