Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 11 10. Januar 2017

Aufgabe 41. (Kreisteilungskörper, 4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel.

(a) Bestimmen Sie für eine Primzahl p und $m \in \mathbb{N}$ das Kreisteilungspolynom $\Phi_{p^m}(T)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}}(\zeta_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie für $n \geq 2$:

$$N_{\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}}(1-\zeta_n) = \begin{cases} p, & \text{falls } n = p^m \text{ eine Primpotenz,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 42. (Galoisgruppe des Polynoms $T^n - p$, 4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Ferner sei $f(T) := T^n - p \in \mathbb{Q}[T]$.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist, und bestimmen Sie den Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

(b) Sei $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

(i) Zu jedem $\sigma \in \mathrm{Gal}(f)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $a(\sigma) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit

$$\sigma(\sqrt[n]{p}) = \sqrt[n]{p} \cdot \zeta_n^{a(\sigma)}.$$

(ii) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}(f) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \\ \sigma & \longmapsto & (a(\sigma), \chi_n(\sigma|_{\mathbb{Q}(\zeta_n)})) \end{array}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Dabei ist die Struktur des semidirekten Produkts ist gegeben durch $\varphi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ wie in der Aufgabe 40(d). Ferner bezeichnet $\chi_n : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ den in der Vorlesung definierten zyklotomischen Charakter.

(c) Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus aus Teil (b) sogar ein Isomorphismus ist, falls n eine Primzahl ist.

Tipp: Welche Ordnung hat in diesem Fall $\mathrm{Gal}(f)$*?*

— **bitte wenden** —

Aufgabe 43. (Sylowgruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

eine 3-Sylowgruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ ist, und bestimmen Sie deren Normalisator in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \left\{ A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) \,\middle|\, AA^t = \pm \mathbf{1}_2 \right\}$$

eine 2-Sylowgruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ ist.

(c) Bestimmen Sie zu jedem Primteiler p von $\#\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ die Anzahl $a_p(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3))$ der p-Sylowgruppen.

Aufgabe 44. (Anwendung der Sylowsätze, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es genau zwei Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung 21 ist, nämlich eine abelsche Gruppe und eine nicht-abelsche Gruppe. Zeigen Sie ferner, dass es sich im nicht-abelschen Fall um ein semidirektes Produkt von zwei Sylowgruppen handelt.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **17. Januar 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`