Prof. Dr. Annette Werner
M.Sc. Adrian Zorbach



# —— Blatt 11 ——

Abgabe bis 23. Januar 2017, 10 Uhr im Fach zum Tutorium.

**Aufgabe 1.** (2 Punkte) Nach Korollar 7.15 hat jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ eine eindeutige Darstellung als Reihe

$$\sum_{n \geq n_0} a_n p^n$$

mit $n_0 \in \mathbb{Z}$ und Koeffizienten $a_n \in \{0, \ldots, p-1\} \subset \mathbb{Z}$. Welche Reihendarstellungen gehören zu Einheiten $x \in \mathbb{Z}_p^\times$?

**Aufgabe 2.** (6 Punkte) $\mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$ ist der Ring der Polynome in den Variablen $X_i$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}_p$. Ein Polynom $f \in \mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$ definiert durch Einsetzen eine Funktion auf $\mathbb{Q}_p$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_p^n &\to \mathbb{Q}_p \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Üblicherweise wird die so definierte Funktion wieder mit $f$ bezeichnet. Um den Unterschied hervorzuheben wollen wir die Funktion hier mit $f(\cdot)$ notieren. Wir wollen zeigen, dass diese Funktionen differenzierbar[1] sind.

Im folgenden betrachten wir nur Polynome in $\mathbb{Q}_p[X]$.

(i) Zeigen Sie, dass Summe und Produkt von differenzierbaren Funktionen wieder differenzierbar sind.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ die Funktion $X^n(\cdot) : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ differenzierbar ist.

(iii) Folgern Sie, dass alle Polynome differenzierbare Funktionen induzieren.

(iv) Berechnen Sie die Ableitung von $X^n(\cdot)$ und allgemeiner von $f(\cdot)$ für beliebige Polynome $f$.

[1] Der Begriff von *differenzierbar* wird am Montag den 16.01. definiert oder können Sie in Definition 9.3 finden.