Prof. Dr. Annette Werner
M.Sc. Adrian Zorbach

Nicht-archimedische Zahlen
Wintersemester 2016/17

—— Blatt 12 ——

Abgabe bis 30. Januar 2017, 10 Uhr im Fach zum Tutorium.

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Betrachtet wird folgende Aussage, wobei K ein Körper mit Absolutbetrag $|\cdot|$ und $(a_n)_n$ eine Folge in K sind:

Gilt $|a_{n+1} - a_n| \to 0$, so ist $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge.

Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage für

(i) $K = \mathbb{R}$ und den gewöhnlichen (archimedischen) Absolutbetrag $|\cdot|$

(ii) $K = \mathbb{Q}_p$ mit $|\cdot| = |\cdot|_p$

Aufgabe 2. (2 Punkte)

In Lemma 9.1 wird folgendes gezeigt: Ist $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{Q}_p$, dann ist $(\sum_{n=0}^{N} a_n)_N$ genau dann konvergent, wenn $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist. Weiter gilt in diesem Fall die Abschätzung

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right|_p \leq \max_{n\leq 0} |a_n|_p.$$

Beantworten Sie folgende Fragen:

(i) Warum dürfen wir überhaupt "max" schreiben, d.h. warum wird das Maximum eigentlich angenommen?

(ii) Was passiert, wenn das Maximum *genau einmal* angenommen wird?

(iii) Was passiert, wenn das Maximum *mehrmals* angenommen wird?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Analog zur Analysis über $\mathbb{R}$ heißt $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ *analytisch* bei a, wenn f lokal bei a mit seiner Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

übereinstimmt, d.h. es gibt eine *offene* Umgebung U von a (z.B. $U = B(a, \epsilon)$), s.d.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

für alle $x \in U$ gilt. f heißt *analytisch*, wenn f überall analytisch ist.

(i) Zeigen Sie, dass die von Polynomen induzierten Funktionen analytisch sind.

(ii) Zeigen Sie, dass die von Reihen induzierten Funktionen analytisch sind (d.h. analytisch in allen Punkten, wo die Reihe auch konvergiert).

(iii) Für welche a ist die im (zweiten) Beispiel nach Definition 9.3 definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x|_p < 1 \\ 1 & \text{für } |x|_p \geq 1 \end{cases}$$

analytisch in a?