

— Fundamente der Mathematik —

Die Vorträge finden Donnerstags von 12 bis 14 Uhr in Raum 901 statt.¹

1 Themenüberblick

1.1 Der Hilbert-Kalkül

In den ersten drei Vorträgen wird der *Hilbert-Kalkül* eingeführt. Dieser bildet die formale Grundlage für alles weitere. In den Vorträgen 12 und 13 werden wir einen zweiten Kalkül kennenlernen: Der *Sequenzkalkül*.

1.2 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz

In den Vorträgen 4 und 5 wird der *Gödelsche Vollständigkeitssatz* formuliert und bewiesen. Hier ist Team-Arbeit erforderlich. In Vortrag 6 werden anschließend Konsequenzen dieses Resultats vorgestellt.

1.3 Mengenlehre

In Vortrag 7 werden die Axiome der *ZFC*-Mengenlehre motiviert. Das ist thematisch einfach, aber dennoch ein Vortrag mit viel Material.

In Vortrag 8 wird erklärt, wie man die natürlichen Zahlen in der *ZFC*-Mengenlehre definieren kann.

Vorträge 9 und 10 bilden eine Einführung in die Theorie der *Ordinal-* und *Kardinalzahlen*. Wer Spaß an Unendlichkeiten hat, kann sich hier freuen.

In Vortrag 11 schließlich werden wir auch den *ersten* und *zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz* für *ZFC* beweisen.

¹Für mehr Informationen: <http://www.uni-frankfurt.de/64518211/Mathematische-Logik>

2 Literatur

Wir werden uns am Buch von Martin Ziegler [Zie17] orientieren. Dieses ist die Neuauflage von 2017. Eine ältere Version von 2010 gibt es auch: [Zie10]. Beide Bücher werden von der Uni-Bibliothek online zur Verfügung gestellt (Stand: 08.03.2017):

<https://hds.hebis.de/ubffm/index.php>

Alternativ ist eines seiner Skripte (dem Buch sehr ähnlich) online verfügbar:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/skripte/logik.pdf>

Vieles aus seinem Buch können wir mangels Zeit nicht durchnehmen. Allerdings gibt es eine aufgezeichnete Vorlesung von Jörn Loviscach auf YouTube:

<https://youtu.be/BN0rF5lv4Nc>

die unsere Themenauswahl wunderbar ergänzt:

- Einordnung in den geschichtlichen Kontext
- Registermaschinen
- Gödel's Unvollständigkeitssätze

3 Spielregeln

- Eine Anmeldung für einen Vortrag ist *verbindlich*: Nichthalten wird als Fehlversuch gewertet und an das Prüfungsamt gemeldet.
- Aus Respekt den Vortragenden gegenüber gilt *Teilnahmepflicht*.
- Handout oder Ausarbeitung wird *nicht* verlangt; uns genügt ein schöner Vortrag. Dieser sollte etwa *75-80 Minuten* in Anspruch nehmen, um uns noch etwas Zeit für Diskussionen zu geben.

4 Vorträge

Vortrag 1 (20. April): Syntax.

Literatur: [Zie17, Teil 1, §1]

Vortrag 2 (27. April): Semantik.

Literatur: [Zie17, Teil 1, §2]

Vortrag 3 (04. Mai): Allgemeingültige Formeln.

Literatur: [Zie17, Teil 1, §3 und Aufgaben 5, 6 und 7 aus §2]

Aufgaben 5 und 6 löst man mit Induktion über den Aufbau der Terme und Formeln. Das zieht sich in die Länge, wenn es viele Konstruktionen (für Terme/Formeln) gibt. Aber da die Schritte für jede dieser ähnlich sind, genügt es, wenn man nicht alle Fälle betrachtet. Ist die Idee für die anderen Schritte ersichtlich ist, reicht uns das.

Vorträge 4 und 5 (11. Mai und 18. Mai): Der Gödelsche Vollständigkeitssatz.

Literatur: [Zie17, Teil 1, §4 bis einschl. Beweisende (von Satz 4.3) und Aufgabe 23]

Die Einteilung überlassen wir den Vortragenden.

Der 25. Mai ist ein Feiertag in Hessen: *Christi Himmelfahrt*.

Vortrag 6 (01. Juni): Der Gödelsche Vollständigkeitssatz, Folgerungen.

Literatur: [Zie17, Teil 1, §4 Rest und Aufgaben 14, 15, 18 und 19]

Siehe auch Aufgabe 6 für eine Motivation für Aufgabe 19.

Vortrag 7 (08. Juni): Axiome der Mengenlehre.

Literatur: [Zie17, Teil 2, §8]

Der 15. Juni ist ein Feiertag in Hessen: *Fronleichnam*.

Vortrag 8 (22. Juni): Die natürlichen Zahlen in ZFC.

Literatur: [Zie17, Teil 2, §9]

Vortrag 9 (29. Juni): Ordinal- und Kardinalzahlen, Teil I.

Literatur: [Zie17, Teil 2, §10 bis Satz 10.2 und Aufgabe 43]

Vortrag 10 (06. Juli): Ordinal- und Kardinalzahlen, Teil II.

Literatur: [Zie17, Teil 2, §10 ab Satz 10.2 und Aufgabe 44]

Vortrag 11 (13. Juli): Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze für ZFC.

Literatur: [Zie17, Teil 2, §11]

Abschlusssitzung (20. Juli).

Literatur

[Zie10] Martin Ziegler. *Mathematische Logik*. Mathematik Kompakt. Birkhäuser Basel, 2010.

[Zie17] Martin Ziegler. *Mathematische Logik*. Mathematik Kompakt. Birkhäuser Basel, 2017.