Jürgen Wolfart

Hausaufgaben und Infos zur Geometrie

Sommersemester 2017

1. Fast eine Aufgabe zur Analysis: Zeigen Sie, dass die stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ einen euklidischen Vektorraum bilden mit Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle \ := \ \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad .$$

2. Analysieren Sie den Beweis der Dreiecksungleichung, um eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, dass in der Dreiecksungleichung das Gleichheitszeichen steht, dass also $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ gilt.

3. V sei ein euklidischer Vektorraum, $a \in V$ ein Vektor der Länge 1. Zeigen Sie, dass

$$f,g : V \to V \quad \text{mit} \quad f(x) \ := \ 2\langle a,x\rangle a - x \quad , \quad g(x) \ := \ x - 2\langle a,x\rangle a$$

orthogonale Abbildungen sind (Def. 1.5 im Skriptum) und beschreiben Sie ihre Wirkung in elementargeometrischer Terminologie.

4. Verifizieren Sie, dass die drei Spalten der Matrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ paarweise orthogonal sind und von Länge 1 im euklidischen $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Standard–Skalarprodukt. Finden Sie einen vierten Vektor, der zu diesen dreien orthogonal ist und ebenfalls die Länge 1 hat.

Abgabe am Mittwoch, 26. April, vor 12 Uhr **in den Postkästen der Tutor(inn)en** im 3. OG der Robert–Mayer–Str. 6. Abgegebene Blätter möglichst tackern und unbedingt mit Ihrem Namen versehen!

Die Tutorien beginnen ab Mittwoch, 19.4.

5. Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts, dass ein Dreieck ABC in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ genau dann einen rechten Winkel im Eckpunkt C besitzt, wenn die Seite $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Dreiecks–Umkreises ist (Satz des Thales und seine Umkehrung).

6. Mit $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$ seien $H_a : \langle a, x \rangle = c$ und $H_b : \langle b, x \rangle = d$ zwei Hyperebenen im euklidischen Punktraum $\mathbb{R}^n$, o.B.d.A. mit $||a|| = 1 = ||b||$. Zeigen Sie, dass es eine dritte Hyperebene $H_s \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass die Spiegelung an H_s die beiden Hyperebenen H_a und H_b vertauscht.

7. Seien $A, B \in O_n$ (orthogonale Matrizen), n ungerade. Man beweise

$$\det((A+B)(A-B)) \;=\; 0 \quad .$$

8. Die *Symmetriegruppe des Würfels:* $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x, y, z \le 1\} =: W \subset \mathbb{R}^3$ sei der Würfel mit den acht Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)^T$. Begründen Sie, dass die euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^3$, welche W in sich abbilden, eine nicht–kommutative Gruppe G aus 48 orthogonalen Transformationen bilden. Beschreiben Sie Untergruppen von G , welche aus 2, 3, 4, 8 Elementen bestehen!

Die Lösungen der Aufgaben **5** bis **8** sind am Mittwoch, 3. Mai, vor 12 Uhr abzugeben (Postkästen der Tutor(inn)en).

9. Die Mittelpunkte $(\pm 1, 0, 0)^T, (0, \pm 1, 0)^T, (0, 0, \pm 1)^T$ der Seitenflächen des Würfels W aus Aufgabe **8** sind die Eckpunkte eines *regelmäßigen Oktaeders* mit acht gleichseitigen Dreiecken als Randflächen. Berechnen Sie den Abstand dieser Randflächen vom Mittelpunkt des Oktaeders! Die Mittelpunkte dieser acht Randdreiecke sind wieder die Eckpunkte eines Würfels. Kantenlänge dieses neuen Würfels?

10. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei eine *Linearform* (d.h. lineare Abbildung in den Grundkörper) auf dem euklidischen $\mathbb{R}^n$ (mit Standard–Skalarprodukt). Zeigen Sie, dass es zu f ein eindeutig bestimmtes $y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$f(x) = \langle x, y \rangle \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \; .$$

Gilt dieser Satz auch für beliebige Linearformen $f : V \to K$ und beliebige Bilinearformen auf V anstelle des Standard–Skalarprodukts?

11. Sei $A \in O_n$; sein charakteristisches Polynom $\chi_A(x)$ zerfalle in Linearfaktoren $\in \mathbb{R}[x]$. $A^2 = ?$

12. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitze die Eigenschaft $A^T = -A$, E bezeichne die Einheitsmatrix, und $E \pm A$ seien beide invertierbar. Zeigen Sie, dass die Matrix $(E+A)^{-1}(E-A)$ orthogonal ist. Hinweis: $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$ für alle invertierbaren Matrizen B .

Abgabe der Aufgaben **9** bis **12** vor Mittwoch, 10. Mai, 12 Uhr.

Musterlösung zu Aufgabe 6.

Vorbemerkungen: 1. a und b sind *Normalenvektoren* auf den Hyperebenen H_a bzw. H_b, d.h. stehen auf diesen senkrecht. Entsprechendes gilt für H_s, wobei wir auch hier $||s|| = 1$ voraussetzen.
2. Wenn außerdem $0 \in H_s$, d.h. wenn H_s durch die Gleichung $\langle s, x\rangle = 0$ beschrieben wird, ist die Spiegelung an H_s die Abbildung $g : x \mapsto x - 2\langle s, x\rangle s$, vgl. Aufgabe **3**. Man beachte: $g(s) = -s$ und $g(x) = x$ für alle $x \in H_s$.

Zum *Beweis* der Behauptung unterscheiden wir drei Fälle:
a) Im Fall $H_a = H_b$ ist nichts zu beweisen; wähle z.B. $H_s = H_a$.
b) Wenn zwar $H_a \neq H_b$, aber beide Hyperebenen parallel sind, dann ist $a = \pm b$, o.B.d.A. $a = -b$, und die beiden zu 0 nächstgelegenen Punkte sind $ca = -cb \in H_a$ bzw. $db \in H_b$, siehe Satz 2.1 im Skriptum. Es gibt eine Translation

$$t : x \to x - \frac{d-c}{2} b \ ,$$

welche den Mittelpunkt $\frac{d-c}{2}b$ der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte in den Nullpunkt verschiebt; wir dürfen also voraussetzen, dass $d = c$ ist und dass die beiden parallelen Hyperebenen durch die Gleichungen

$$\langle -b, x\rangle = d \qquad \text{bzw.} \qquad \langle b, x\rangle = d$$

gegeben sind. Nun setze man einfach $s = b$ und verwende die Spiegelung aus Vorbemerkung 2; diese vertauscht b und $-b$ genau wie H_b und H_{-b} und erfüllt daher die Behauptung.
c) Wenn schließlich H_a und H_b nicht parallel sind, sind a und b linear unabhängig und $H_a \cap H_b \neq \emptyset$. Es gibt also eine Translation, welche 0 in den Schnitt der beiden Hyperebenen verschiebt. Wir dürfen darum o.B.d.A. $0 \in H_a \cap H_b$ voraussetzen, brauchen nur noch eine geeignete Hyperebene H_s mit $0 \in H_s$ zu finden. Man wähle hier $s = ||b - a||^{-1}(b - a)$ und überzeuge sich, dass die Spiegelung aus Vorbemerkung 2 die beiden Vektoren b und a vertauscht; es ist nämlich

$$b - a \perp b + a \quad \text{wegen} \quad \langle b - a, b + a\rangle = ||b||^2 - ||a||^2 = 0 \ , \quad \text{also } b + a \in H_s$$

$$\text{und darum} \qquad g(b - a) = a - b \ , \quad g(b + a) = b + a \ , \quad \text{folglich} \quad g(b) = a \ , \ g(a) = b \ .$$

Somit vertauscht g auch die dazu orthogonalen Unterräume H_a und H_b.

Wichtig: Es besteht ein krasser Gegensatz zwischen der Anzahl der Hörer, die wirklich in der Vorlesung anwesend sind (~ 70) und der Anzahl der angemeldeten Übungsteilnehmer (> 170). Jedem steht frei, die Vorlesung nur in der e-learning–Aufzeichnung mitzuverfolgen. Aber auch e-learning–Fans geben zu, dass die Klausurnoten jener Teilnehmer deutlich besser ausfallen – im Schnitt 3 Notenpunkte –, welche die Präsenzveranstaltung besuchen. Bedenken Sie das!

13. Verifizieren Sie, dass $\frac{1}{3}(A+B+C)$ der Schwerpunkt (= Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) des Dreiecks in der euklidischen Ebene mit Eckpunkten A, B, C ist.

14. Die selbstadjungierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ !

15. φ, ψ seien selbstadjungierte Abbildungen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $\varphi \circ \psi$ ist selbstadjungiert genau dann, wenn $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

16. Welche Punktmengen im $\mathbb{R}^3$ entstehen beim Schnitt eines Kreiszylinders mit Ebenen? Gehen Sie ähnlich vor wie beim Schnitt eines Kreiskegels mit Ebenen: Erfinden Sie eine möglichst einfache Gleichung für einen Kreiszylinder und machen Sie eine Fallunterscheidung je nach Lage der Ebene.

Abgabe der Aufgaben **13** bis **16** vor Mittwoch, 17. Mai, 12 Uhr.

Wichtige Bemerkung zur Bearbeitung von Hausaufgaben: Aus merkwürdigen juristischen Gründen dürfen wir für Bachelor– und L3–Studierende in Geometrie und GdA keine Klausurzulassung mehr festlegen. Sie dürfen also die Klausur mitschreiben, ohne je eine Hausaufgabe gelöst zu haben. Sie sind aber erwachsen und können selbst beurteilen, ob das empfehlenswert ist oder nicht.

17. Sei $0 < c \in \mathbb{R}$, $L := \{(x, -c) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $F := (0, c) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Menge K aller $P \in \mathbb{R}^2$, die von L und F den gleichen euklidischen Abstand besitzen.

18. Fortsetzung: Zeigen Sie, dass die Tangente T, welche die Kurve K im Punkt P berührt, Winkelhalbierende ist für die Gerade FP und die Parallele zur y–Achse durch den Punkt P.

19. V sei der in Aufgabe **1** untersuchte euklidische Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle g, f \rangle = \int_0^1 g(x)f(x)dx$. Zeigen Sie, dass

$$S : V \to V^* \; : \; f \;\mapsto\; (\, g \mapsto \langle g, f \rangle \,)$$

eine injektive, aber nicht surjektive lineare Abbildung ist. Tipp: Zeigen Sie, dass für jedes $a \in [0, 1]$ die Abbildung $a^* : g \mapsto g(a)$ zu V^* gehört, aber kein S–Bild ist.

20. Zeigen Sie: Die Lösungsmenge der Gleichung $x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$ im $\mathbb{R}^3$ (ohne den Nullvektor) ergibt eine wohldefinierte Punktmenge K in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Die Punktmenge $K \cap \mathbb{A}^2$ in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus H$, wenn wir aus der projektiven Ebene die (Horizont–) Gerade $H : x_0 = 0$ entfernen, ist eine Hyperbel. Welche Punkte auf H gehören zu K – oder, anders gesagt: Welche unendlich fernen Punkte gehören zur Hyperbel? Zeigen Sie, dass die beiden Asymptoten $x_1 = \pm x_2$ der Hyperbel in der projektiven Ebene zu Tangenten an K werden.

Abgabe der Aufgaben **17** bis **20** vor Mittwoch, 24. Mai, 12 Uhr.

Die **Nachklausur** zur Geometrie und GdA findet am **Donnerstag, den 28.9.17** zwischen 9.15 und 10.15 Uhr bzw. zwischen 10.45 und 11.45 Uhr im H V statt. Sie darf als Erstversuch genutzt werden, d.h. Sie dürfen teilnehmen, auch wenn Sie die Klausur am 26.7. nicht mitgeschrieben haben!

21. Durch $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ist eine Kurve im affinen $\mathbb{R}^2$ definiert. Durch welche Gleichung lässt sich eine natürliche Fortsetzung der Kurve in die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ bschreiben? Welche Punkte im Unendlichen kommen hinzu?

22. $\mathbb{P}$ erfülle die Axiome 1), 2P), 3) einer projektiven Ebene (Vorlesung am 17.5., Skriptum S. 26). Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}$ mindestens sieben Punkte und sieben Geraden enthält!

23. Gegeben zwei Geraden $k \neq s$ in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, dazu sechs Punkte $A_1, B_1, C_1 \in k \setminus s$, $\quad A_2, B_2, C_2 \in s \setminus k$; die Geraden $A_1B_2 || A_2B_1$ (seien parallel),

$$A_1C_2 \cap A_2C_1 =: M \ , \quad B_1C_2 \cap B_2C_1 =: N$$

seien Schnittpunkte. Zeigen Sie: $MN || A_1B_2$ (Hausaufgabe 10. Klasse Waldorfschule).

24. Sie haben auf Ihrem Blatt zwei parallele Geraden $g \neq h$ und einen Punkt M außerhalb dieser beiden Parallelen. Wie können Sie nur mit Bleistift und Lineal – also ohne Zirkel, Geodreieck, Längen– oder Winkelmessung – eine Parallele zu g und h durch den Punkt M zeichnen? Tipp: Nutzen Sie Aufgabe **23** oder die Dualisierung (hier also die Umkehrung) des Satzes von Desargues.

Abgabe der Aufgaben **21** bis **24** vor Mittwoch, 31. Mai, 12 Uhr.

Musterlösung zu Aufgabe 19.

Dass S eine lineare Abbildung ist, folgt einfach daraus, dass das Skalarprodukt linear im zweiten Argument ist. S ist injektiv, denn der Kern von S besteht nur aus der Nullfunktion $f \equiv 0$, andernfalls ist ja $\langle f, f \rangle \neq 0$ nach Aufgabe **1.**

Für „S nicht surjektiv" nutzen wir den Hinweis, der in der Aufgabe gegeben ist: Für jedes

$a \in [0,1]$ ist $a^* \in V^*$, denn

$$a^* : \ g_1 + g_2 \ \mapsto \ (g_1+g_2)(a) \ = \ g_1(a) + g_2(a) \ = \ a^*(g_1) + a^*(g_2) \ ,$$

und genauso ist a^* auch verträglich mit der Multiplikation von Skalaren $r \in \mathbb{R}$. Allerdings ist a^* kein S–Bild, und dazu muss man etwas Analysis investieren:

Angenommen, es gäbe ein $f \in V$ mit $S(f) = a^*$, also mit $\int_0^1 g(x)f(x)dx = g(a)$ für alle $g \in V$. Wir zeigen zunächst, dass dann $f(b) = 0$ wäre für alle $b \in [0,1]$ mit $b \neq a$: Andernfalls sei o.B.d.A. $f(b) > 0$; da f stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass f positive Werte im Intervall $[0,1] \cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ hat, und dabei können wir ε so klein wählen, dass a nicht in diesem Intervall liegt. Nun definieren wir uns ein stetiges $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := 0 \quad \text{für alle} \quad x \leq b - \varepsilon \quad \text{und alle} \quad x \geq b + \varepsilon$$

und $g(x) := (x - b + \varepsilon)(b + \varepsilon - x)$ dazwischen. Dann ist $g(a) = 0$, aber $\int_0^1 g(x)f(x)dx > 0 = g(a)$, Widerspruch. Also müsste $f \equiv 0$ außerhalb von $x = a$ sein. Da f stetig sein soll, verschwindet f aber auf dem ganzen Intervall, somit ist $S(f) \neq a^*$.

25. p sei eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Wieviele Punkte hat der projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)$? Machen Sie eine kleine Tabelle für $p = 2, 3, 5$, $n = 1, 2, 3$.

26. Zum traditionellen Doppelkopfturnier der Fachschaft Mathematik haben sich 13 Teilnehmer angemeldet. Doppelkopf ist ein Kartenspiel für 4 Personen, und Sie sollen ein möglichst faires Turnier organisieren. Die erste Idee, dass alle Viererkombinationen von Teilnehmern je eine Runde gegeneinander spielen, würde auf $\binom{13}{4} = 715$ zu spielende Runden hinauslaufen, das ist nicht praktikabel. Glücklicherweise haben Sie einige Vorlesungen über projektive Geometrie gehört und kennen eine bessere Möglichkeit, in der insgesamt nur 13 Runden gespielt werden und jedes Paar von Teilnehmern in genau einer Runde aufeinandertrifft. Wie geht das?

27. Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $\overline{a}, \overline{b}$ dazu komplex konjugiert. Zeigen Sie: $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$ ist ein 4–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum, zugleich (bezüglich Matrixaddition und –multiplikation) ein *Schiefkörper*, d.h. erfüllt alle Körperaxiome mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

Abgabe der Aufgaben **25** bis **27** vor Mittwoch, 7. Juni, 12 Uhr.

Die **Klausur** zur Geometrie wird am Mittwoch, den 26. Juli, von 10.15 bis 11.15 Uhr im Hörsaal V geschrieben (anschließend von 11.45 bis 12.45 die GdA–Klausur).
Mitzubringen ist Schreibpapier, mindestens zwei funktionsfähige Schreibgeräte, Goethecard und/oder Personalausweis.
Verboten: Bücher, Skripten, Smartphone, Laptop, Tablet etc.
Erlaubt: Ein zweiseitig handschriftlich und eigenhändig beschriebener DIN A4 –Spickzettel, keine Kopie!

Bedingungen für die **Nachklausur** (s.o. S.5) wie bei der Erstklausur.

Musterlösung zu Aufgabe 25.

Nach Definition ist $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p) := (\mathbb{F}_p^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{F}_p^*$, die gefragte Anzahl ist also

$$\frac{p^{n+1}-1}{p-1} = \sum_{j=0}^{n} p^j = 1 + p + \ldots + p^n .$$

Für die kleinen Primzahlen und Dimensionen ergibt sich demnach

$p =$	2	3	5
$n = 1$	3	4	6
2	7	13	31
3	15	40	156

Musterlösung zu Aufgabe 26 (Maria Richard)

Wir betrachten $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$. Aus Aufgabe 25 wissen wir, dass diese projektive Ebene 13 Punkte hat. Dann gibt es auch 13 verschiedene Geraden, da aufgrund der Dualität die Anzahl der Geraden und Punkte übereinstimmt. Eine Möglichkeit der Darstellung ist folgende:

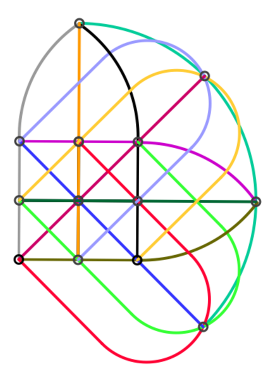

Abbildung 1: projektiver Raum mit 13 Elementen
Quelle: *www.mathpoint.ch/geometrie_der_toene.html*

Um die Problematik des Doppelkopfturnieres zu lösen, stellen wir uns die Punkte als Teilnehmer und die Geraden als Spielerunden vor. Die Teilnehmer spielen also zusammen, wenn ihre assoziierten Punkte auf einer Geraden liegen. Diese Vorstellung ist wohldefiniert, da auf jeder Geraden von $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ genau 4 Punkte liegen. Axiom 1) für projektive Ebenen (siehe Skript Seite 26) besagt, dass es zu je zwei Punkten genau eine Verbindungsgerade gibt, also spielen je zwei Teilnehmer genau eine Spielerunde zusammen. Diesen Sachverhalt kann man auch leicht mithilfe von Abbildung 1 nachvollziehen. Somit liefert uns $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ eine Vorgehensweise, um das Turnier in 13 Spielrunden so durchzuführen, dass jedes Paar von Teilnehmern genau einmal aufeinandertrifft.