Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
4 Mai 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (3 Punkte) *Betrachten Sie die* 3×3*-Matrix*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $A^3 = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\exp(A) := E_3 + A + \frac{1}{2}A^2$$

invertierbar ist. invertierbar ist. Wieso nennen wir sie $\exp(A)$*?*

c) Finden Sie die Lösungmenge des Gleichungssystem

$$\exp(A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (5 Punkte) *Seien* A *und* B $n \times n$*-Matrizen. Der Kommutator* $[A, B]$ *und Antikommutator* $\{A, B\}$ *sind nach Definition die* $n \times n$*-Matrizen*

$$[A, B] := AB - BA \text{ und } \{A, B\} := AB + BA.$$

a) Berechnen Sie $[A, B], [A, C]$ *und* $\{B, C\}$ *der folgenden Matrizen*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für $n \times n$*-Matrizen* A, B *und* C *gilt*

b) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ *und* $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 11. Mai** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

c) $\{A, BC\} = \{A, B\}C - B[A, C]$ *und* $\{AB, C\} = A\{B, C\} - [A, C]B$.

d) $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$.

e) $[A, \{B, C\}] + [C, \{A, B\}] + [B, \{C, A\}] = 0$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Transformieren Sie die nachfolgenden Matrizen jeweils durch elementare Umformungen in eine Matrix in Zeilenstufenform*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Lösen Sie mit der Anwendung des Gauß'sches Eliminationsverfahren die folgenden linearen Gleichungssysteme.*

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$