Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
18 Mai 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Für jedes $n > 0$ betrachten Sie die folgende $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{pmatrix},$$

wobei $\{a_i\}_{i \geq 1}$ eine feste Folge reeller Zahlen mit $a_i > 0$ für alle $i \geq 1$ ist. Sei $\Delta_n := det(A_n)$.

Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}.$$

Aufgabe 2. (8 Punkte) *Betrachten Sie die folgenden $(n+m) \times (n+m)$-Blockmatrizen über $\mathbb{R}$, die durch*

$$M_1 := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad M_1 := \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

definiert sind, wobei $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $C_1, C_2 \in R^{m \times n}$.

a) Zeigen Sie:

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 M_2 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{pmatrix}.$$

b) Betrachten Sie die folgende $(n+m) \times (n+m)$-Blockmatrix über $\mathbb{R}$:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{O} & D \end{pmatrix},$$

Abgabe bis **12 Uhr** am **Freitag, den 26. Mai** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, D \in \mathbb{R}^{m\times m}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $\mathbf{O} \in R^{m\times n}$ *die Nullmatrix ist. Beweisen Sie, dass*

$$\det(M) = \det(A)\det(D).$$

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Sei* A *eine* $n \times n$*-Matrix über* $\mathbb{R}$ *und* A^t *die zugehörige transponierte Matrix. Die Matrix* A *heißt symmetrisch, wenn* $A^t = A$*, und schiefsymmetrisch, wenn* $A^t = -A$*. Zeigen Sie:*

a) Jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *kann man schreiben als*

$$A = S + T,$$

wobei S *eine symmetrische und* T *eine schiefsymmetrische Matrix ist.*

b) Ist n *ungerade und* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *schiefsymmetrisch, dann ist* $\det(A) = 0$*.*

Aufgabe 4. (6 Punkte) *Betrachten Sie die folgenden Permutationen* $\sigma_1, \sigma_2 \in S_8$*:*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 8 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Permutationen $\sigma_1\sigma_2$ *und* $\sigma_2\sigma_1$*.*

b) Schreiben Sie σ_1 *und* σ_2 *als Produkt von Transpositionen.*

c) Geben Sie, die entsprechend Permutationsmatrizen P_{σ_1} *und* P_{σ_2} *an.*

d) Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma_1)$ *und* $\operatorname{sgn}(\sigma_2)$*.*