Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
24 Mai 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (8 Punkte) *Eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ heißt ein r-Zykel, wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_r \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit*

$$\sigma(a_i) = a_{i+1} \text{ für } i = 1, \ldots, r-1; \quad \sigma(a_r) = a_1$$

und σ alle übrigen Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ festlässt. Man schreibt $\sigma = (a_1 \cdots a_r)$.

a) Zeigen Sie: für jeden r-Zykel σ gilt $\sigma^r = \mathrm{id}$.

b) Zeigen Sie, dass jede Permutation als Produkt von zyklischen Permutationen geschrieben werden kann.

c) Wieviele n-Zykel gibt es in $\mathcal{S}_n$? Wieviele r-Zykel?

d) Seien $\sigma_1 = (a_1 \cdots a_r)$ ein r-Zykel und $\sigma_2 = (b_1 \cdots b_s)$ ein s-Zykel. Man sagt, dass σ_1 und σ_2 disjunkt sind, wenn die zugehörigen Mengen $\{a_1, \ldots, a_r\}$ und $\{b_1, \ldots, b_s\}$ disjunkt sind. Zeigen Sie, dass disjunkte zyklische Permutationen kommutieren, d.h. $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Betrachten Sie die folgenden Permutationen in $\mathcal{S}_7$:*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Schreiben Sie σ_1 und σ_2 als Produkt von Zykeln.

b) Berechnen Sie σ_1^2, σ_2^4, $\sigma_1\sigma_2$ und $\sigma_2\sigma_1$.

c) Berechnen Sie das Signum von σ_1 und σ_2.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Sei $A = (s_{A,1} \cdots s_{A,4})$ eine 2×4-Matrix und $B = \begin{pmatrix} z_{B,1} \\ \vdots \\ z_{B,4} \end{pmatrix}$ eine 4×2-Matrix.*

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 1. Juni** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Für jedes 2*-Tupel* $I = (i_1, i_2)$*, mit* $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$*, haben wir die* 2×2*-Matrizen*

$$A_I = (s_{A,i_1} s_{A,i_2}), \quad B_I = \begin{pmatrix} z_{B,i_1} \\ z_{B,i_2} \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{T}$ *die Menge aller solchen* 2*-Tupel.*

a) *Zeigen Sie, dass*

$$\det(AB) = \sum_{I\in\mathcal{T}} \det A_I \det B_I.$$

b) *Wenden Sie diese Formel auf die folgenden Matrizen an:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. (6 Punkte) *(Regel von Sarrus) Betrachten Sie die folgende* 3×3*-Matrix über* $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

a) *Zeigen Sie, dass*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Das heißt, wir können die Determinante von A *durch die Regel*

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

berechenen.

b) *Berechnen Sie mit Hilfe diese Formel die Determinante der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.