

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (8 Punkte) Eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ heißt ein r -Zykel, wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit

$$\sigma(a_i) = a_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, r-1; \quad \sigma(a_r) = a_1$$

und σ alle übrigen Elemente von $\{1, \dots, n\}$ festlässt. Man schreibt $\sigma = (a_1 \cdots a_r)$.

- Zeigen Sie: für jeden r -Zykel σ gilt $\sigma^r = \text{id}$.
- Zeigen Sie, dass jede Permutation als Produkt von zyklischen Permutationen geschrieben werden kann.
- Wieviele n -Zykel gibt es in \mathcal{S}_n ? Wieviele r -Zykel?
- Seien $\sigma_1 = (a_1 \cdots a_r)$ ein r -Zykel und $\sigma_2 = (b_1 \cdots b_s)$ ein s -Zykel. Man sagt, dass σ_1 und σ_2 disjunkt sind, wenn die zugehörigen Mengen $\{a_1, \dots, a_r\}$ und $\{b_1, \dots, b_s\}$ disjunkt sind. Zeigen Sie, dass disjunkte zyklische Permutationen kommutieren, d.h. $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Betrachten Sie die folgenden Permutationen in \mathcal{S}_7 :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Schreiben Sie σ_1 und σ_2 als Produkt von Zykeln.
- Berechnen Sie $\sigma_1^2, \sigma_2^4, \sigma_1\sigma_2$ und $\sigma_2\sigma_1$.
- Berechnen Sie das Signum von σ_1 und σ_2 .

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $A = (s_{A,1} \cdots s_{A,4})$ eine 2×4 -Matrix und $B = \begin{pmatrix} z_{B,1} \\ \vdots \\ z_{B,4} \end{pmatrix}$ eine 4×2 -Matrix.

Abgabe bis **12 Uhr am Donnerstag, den 1. Juni** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Für jedes 2-Tupel $I = (i_1, i_2)$, mit $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$, haben wir die 2×2 -Matrizen

$$A_I = (s_{A,i_1} s_{A,i_2}), \quad B_I = \begin{pmatrix} z_{B,i_1} \\ z_{B,i_2} \end{pmatrix}.$$

Sei \mathcal{T} die Menge aller solchen 2-Tupel.

a) Zeigen Sie, dass

$$\det(AB) = \sum_{I \in \mathcal{T}} \det A_I \det B_I.$$

b) Wenden Sie diese Formel auf die folgenden Matrizen an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

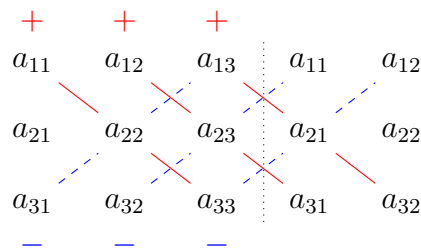
Aufgabe 4. (6 Punkte) (Regel von Sarrus) Betrachten Sie die folgende 3×3 -Matrix über \mathbb{R}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Das heißt, wir können die Determinante von A durch die Regel



berechnen.

b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.