Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
1 Juni 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (6 Punkte) *Seien $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ invertierbare Matrizen und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:*

a) $Adj(cA) = c^{n-1} Adj(A)$.

b) $Adj(A^t) = Adj(A)^t$.

c) $Adj(AB) = Adj(B) Adj(A)$.

d) $\det(Adj(A)) = \det(A)^{n-1}$.

e) $Adj(Adj(A)) = \det(A)^{n-2} A$.

f) $Adj(A)^{-1} = Adj(A^{-1})$.

Aufgabe 2. (3 Punkte) *Betrachten Sie die 4×4-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $\delta := a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel für die Matrixinversion, dass

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

die inverse Matrix zu A ist.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 8. Juni** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $GL_n(\mathbb{R})$:*

$$\begin{aligned} SL_n(\mathbb{R}) &:= \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}, \\ U_+ &:= \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A \textit{ obere Dreiecksmatrix}\}, \\ U_- &:= \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A \textit{ untere Dreiecksmatrix}\}, \\ \mathrm{Spur}_0 &:= \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Spur}(A) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei die Spur *einer Matrix A in Aufgabe* 1 *von Übungsblatt 2 definiert ist.*

a) *Zeigen Sie, dass $SL_n(\mathbb{R})$, U_+ und U_- Untergruppen von $GL_n(\mathbb{R})$ sind.*

b) *Ist* Spur_0 *eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.*

Aufgabe 4. (3 Punkte) *Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe von G.*

a) *Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Teilmenge*

$$gHg^{-1} = \left\{ghg^{-1} : h \in H\right\} \subset G$$

eine Untergruppe von G ist.

b) *Geben Sie ein $\sigma \in \mathcal{S}_3$ und eine Untergruppe $H \subset \mathcal{S}_3$ an, so dass:*

$$\sigma H \sigma^{-1} \neq H.$$

c) *Seien H_1, H_2 Untergruppen von G und für alle $g \in G$ gelte: $gH_2g^{-1} = H_2$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge*

$$H_1H_2 = \{h_1h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$$

eine Untergruppe von G ist.