Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
8 Juni 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. (6 Punkte) *Betrachten Sie die folgende Teilmenge K der quadratischen Matrizen $\mathbb{R}^{2\times 2}$:*

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) *Zeigen Sie, dass K bezüglich Matrizenaddition und -multiplikation ein Körper ist.*

b) *Was ist die Charakteristik von K?*

c) *Zeigen Sie, dass es ein $X \in K$ gibt, so dass die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ erfüllt ist.*

d) *Zeigen Sie, dass die Teilmengen*

$$K_{\mathbb{R}} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } K_{\mathbb{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\},$$

Teilkörper von K sind.

Aufgabe 2. (3 Punkte) *Betrachten Sie die Menge $K := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, mit den folgenden Verknüpfungen:*

V1

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2, y_1 y_2). \end{aligned}$$

V2

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

Abgabe bis **12 Uhr** am **Freitag, den 16. Juni** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

a) K ist bezüglich der Verknüpfungen, die in $V1$ definiert sind, kein Körper.

b) K ist ein Körper bezüglich der Verknüpfungen, die in $V2$ definiert sind.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Seien $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Zeigen Sie:*

a) Für alle $x, y \in \mathbb{F}_p$ gilt $(x+y)^p = x^p + y^p$.

b) Für alle $x \in \mathbb{F}_p$ gilt $x^p = x$.

c) Die Teilmenge $\mathbb{F}_p^\times$ ist eine Gruppe bezüglich Multiplikation. Ferner gibt es ein $a \in \mathbb{F}_p^\times$, so dass

$$\mathbb{F}_p^\times = \{a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}.$$

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen in $(\mathbb{F}_3)^{3\times 3}$

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $A + B$, $A - B$ und AB.

b) Wenden Sie die Formel zur Determinantenrechnung auf A und B an und berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$. Ist $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$? Ist $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$?

c) Berechnen Sie, mit Hilfe der Cramerschen Regel für die Matrixinversion gegebenenfalls A^{-1} und B^{-1}.