Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2017

Übungsblatt 2 14. Juni 2017

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Bei welcher der folgenden Teilmengen handelt es sich um Untergruppen?

(a) $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + 3b = 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(b) $\{\sigma \in S_4 : \sigma(1) \neq 2\} \subseteq S_4$
(c) $\mathbb{Q}^\times \subseteq \mathbb{Q}$
(d) $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : AA^t = 1\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ bezeichne $[a] := a + n\mathbb{Z}$ die Restklasse von a in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sei $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a \mapsto [a]$ der Restklassenhomomorphismus.

(a) Bestimmen Sie Bild und Kern von φ.
(b) Zeigen Sie: Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$ genau dann, wenn $a \mid b$.
(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Proposition 2.27 alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(d) Wie viele Untergruppen besitzt $\mathbb{Z}/2^{2017}\mathbb{Z}$?

Aufgabe 7. (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Elemente von endlicher Ordnung in $\mathbb{Q}^\times$.
(b) Bestimmen Sie die Ordnung von 7 in $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$.
(c) Zeigen Sie: Hat $g \in G$ Ordnung n und ist $d \mid n$ ein Teiler, so hat g^d Ordnung n/d.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift $g.h := ghg^{-1}$ eine Operation von G auf sich selbst definiert ist.
(b) Was ist der Kern des zugehörigen Homomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}(G)$?

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **21. Juni 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65116210/17_SS_GdA`