Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
14 Juni 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. (6 Punkte) *Seien $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elemente. Betrachten Sie den $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $V := \mathbb{F}_p^n$.*

(a) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von V.

(b) Wie viele Untervektorräume der Dimension 1 gibt es in V?

(c) Wie viele Untervektorräume der Dimension m, für $m = 0, \dots, n$, gibt es in V?

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Betrachten Sie die folgenden Vektoren in $V := \mathbb{R}^3$ und überprüfen Sie ob sie linear abhängig oder linear unabhängig sind:*

a) $(9, 1, 5)^t, (17, 11, 14)^t, (9, 1, 5)^t$.

b) $(1, 1, 0)^t, (1, 0, 1)^t$.

c) $(1, 9, 7)^t, (2, 3, 4)^t, (9, 7, 6)^t, (6, 6, 6)^t$.

d) $(1, \alpha, 0)^t, (\alpha, 1, 0)^t, (0, \alpha, 1)^t$ *wobei* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ist.*

Aufgabe 3. (6 Punkte) *Seien K ein Körper und $K^{n\times n}$ der K-Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K.*

a) Zeigen Sie, dass die Teilmengen

$$\mathit{Sym}(n; K) := \left\{A \in K^{n\times n} : A^t = A\right\} \subset K^{n\times n}$$

$$\mathit{Alt}(n; K) := \left\{A \in K^{n\times n} : A^t = -A\right\} \subset K^{n\times n}$$

Untervektorräume von $K^{n\times n}$ sind.

b) Geben Sie jeweils eine Basis von $\mathit{Sym}(n; K)$ und $\mathit{Alt}(n; K)$ an.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 22. Juni** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Aufgabe 4. (3 Punkte) *Sei K ein Körper und X eine formale Variable. Betrachten Sie die Menge der Polynome in X mit Koeffizienten in K:*

$$K[X] = \left\{ f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i : a_i \in K, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Wir definieren die Addition auf $K[X]$ durch

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i \right) := \sum_{i=0}^{max\{n,m\}} (a_i + b_i) X^i,$$

wobei $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_i = 0$ für $i > m$ gesetzt wird. Des Weiteren definieren wir eine Skalarmultiplikation auf $K[X]$ durch

$$\alpha \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) X^i.$$

(a) Zeigen Sie, dass $K[X]$ ein K-Vektorraum ist.

(b) Sei $d \in \mathbb{N}_0$ fest. Zeigen Sie, dass

$$K[X]_d = \left\{ f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X] : n \leq d \right\}$$

ein Untervektorraum von $K[X]$ ist. Geben Sie eine Basis von $K[X]_d$ an.

(c) Geben Sie einen Vektorraumisomorphismus zwischen $K[X]_d$ und K^{d+1} an.