Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
22 Juni 2017

Lineare Algebra
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Betrachten Sie den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathbb{Q}^3$ und die Vektoren*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V ist.*

(b) *Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren $\kappa_{\mathcal{B}'}(e_1), \kappa_{\mathcal{B}'}(e_2), \kappa_{\mathcal{B}'}(e_3)$ der kanonischen Einheitsvektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$.*

(c) *Geben Sie die Übergangsmatrix von der kanonischen Basis $\mathcal{B}$ zu der Basis $\mathcal{B}'$ an.*

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Seien $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V und $\gamma_i \in K$, $1 \leq i \leq n$. Betrachten Sie die Teilmenge*

$$U := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i = 0 \right\} \subset V.$$

a) *Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.*

b) *Bestimmen Sie eine Basis von U.*

c) *Berechnen Sie die Dimension von U.*

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Betrachten Sie den 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$.*

a) *Untersuchen Sie, ob die Vektoren in den folgenden Familien linear abhängig oder linear unabhängig sind.*

$$\mathcal{B}_1 := \{(-2, -4, 3)^t, (0, 1, -2)^t, (2, 2, 1)^t\}, \quad \mathcal{B}_2 := \{(-5, 2, -1)^t, (3, 4, -1)^t, (2, -2, 1)^t\}$$

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 29. Juni** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

b) Berechnen Sie die Dimensionen derVektorräume $\langle \mathcal{B}_1 \rangle$ *und* $\langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

c) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $\langle \mathcal{B}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Sei* K *ein Körper und* V *ein* n*-dimensionaler* K*-Vektorraum. Seien* $U_1, U_2, U_3 \subset V$ *Untervektorräume von* V*. Zeigen Sie:*

a)

$$\begin{aligned}\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) + \dim_K(U_3) &= \dim_K(U_1 + U_2 + U_3) + \\ &\quad \dim_K((U_1 + U_2) \cap U_3) + \dim_K(U_1 \cap U_2)\end{aligned}$$

b) Die Gleichheit $U_1 + U_2 + U_3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ *gilt genau dann, wenn* $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ *und* $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \{0\}$.